

CASCADES INFINIMENT DIVISIBLES : VERS UNE PHYSIQUE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE ?

P. Chainais

LIMOS UMR 6158

ISIMA - Univ. Clermont II

Clermont-Ferrand



Mécanique des fluides : l'équation de Navier-Stokes



C.L. Navier
(1785-1836)



G.G. Stokes
(1819-1903)

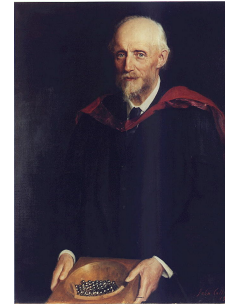
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{inertie}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underbrace{\nu \Delta \mathbf{v}}_{\text{diffusion}} \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

équation **non-linéaire** \implies **instabilités...**

solution(s) 3D : **existence ? unicité ? régularité ?**

Nombre de Reynolds

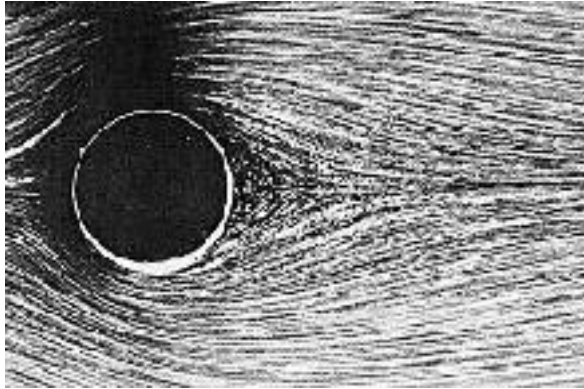
$$Re = \frac{U L}{\nu}$$



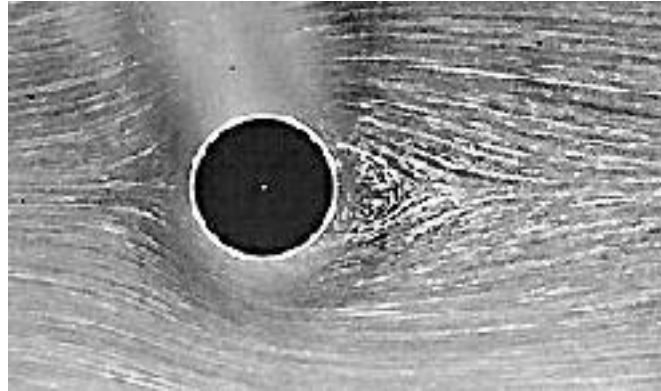
O. Reynolds
(1842-1912)

	U [m.s ⁻¹]	L [m]	ν [m.s ⁻²]	Re
manteau terrestre	10^{-5}	10^5	10^{20}	10^{-20}
bactérie dans l'eau	10^{-5}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}
fumée de cigarette	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	10^2
batteur à œufs	10^0	10^{-2}	10^{-6}	10^4
nageur dans l'eau	10^0	10^0	10^{-6}	10^6
écoulement atmosphérique	10^1	10^2 à 4	10^{-5}	10^8 à 10

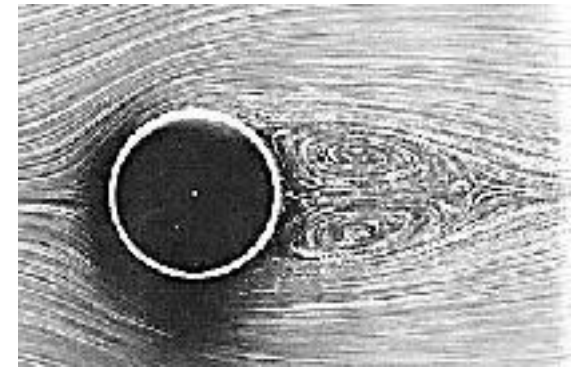
Transition vers la turbulence : autour de Re_c



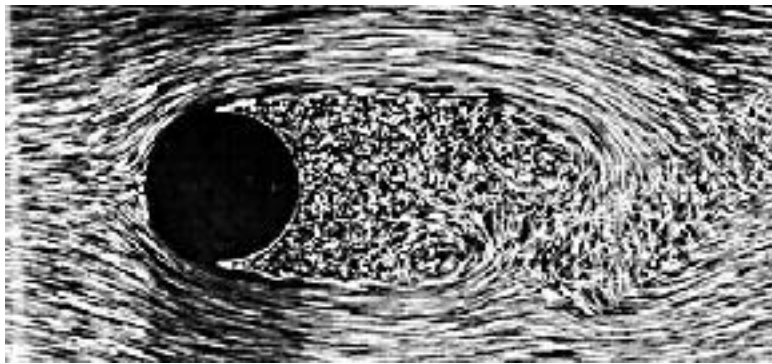
$Re = 9,6$



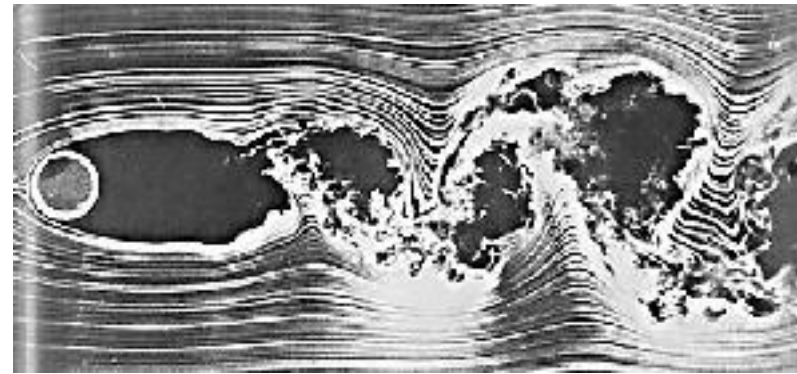
$Re = 13,1$



$Re = 26$



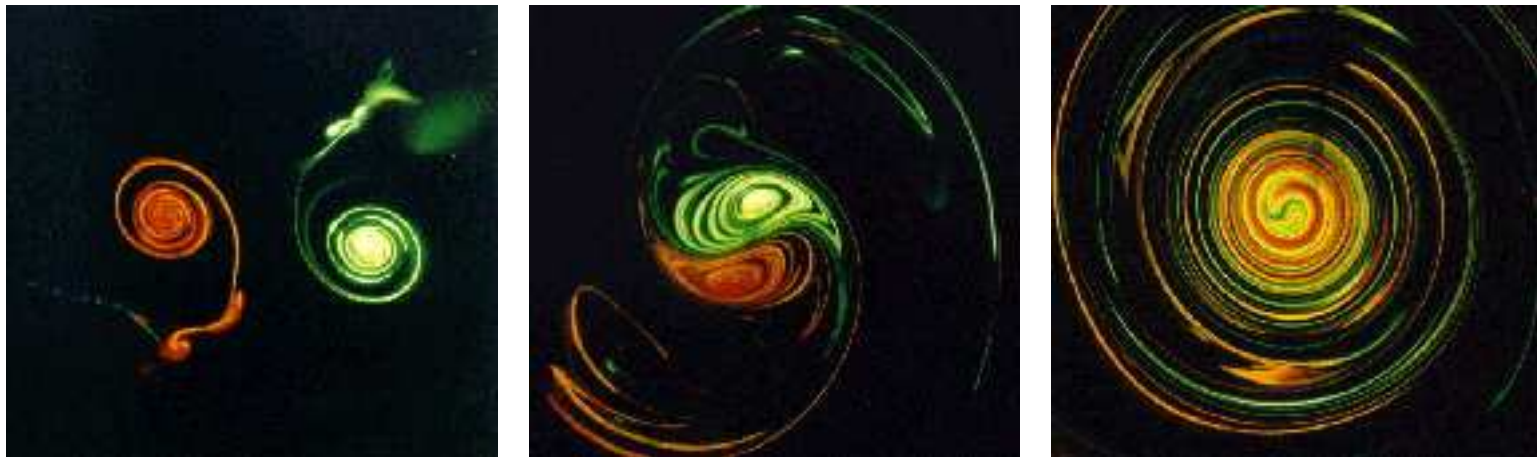
$Re = 2000$



$Re = 10000$

En régime turbulent ($Re > Re_c$)

- ☞ **irrégularité** en temps et en espace (cf. instabilités),
- ☞ présence de structures à des **échelles très différentes**,
- ☞ **dissipation** efficace,
- ☞ **mélange** efficace.



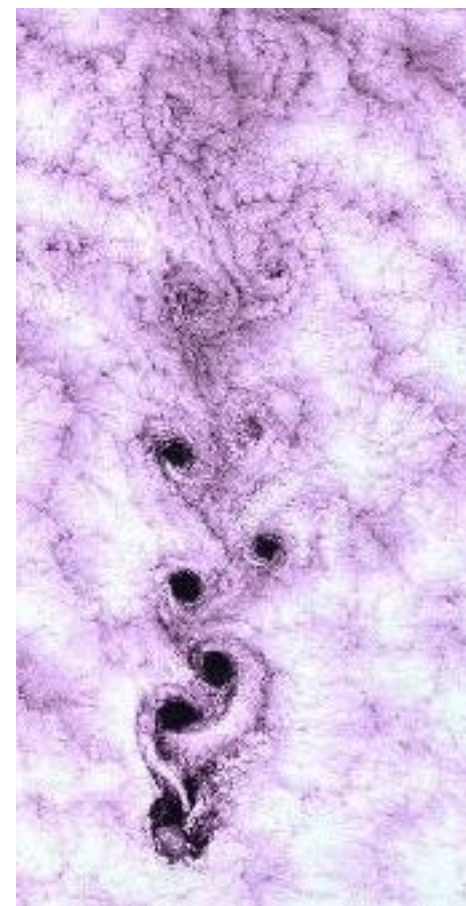
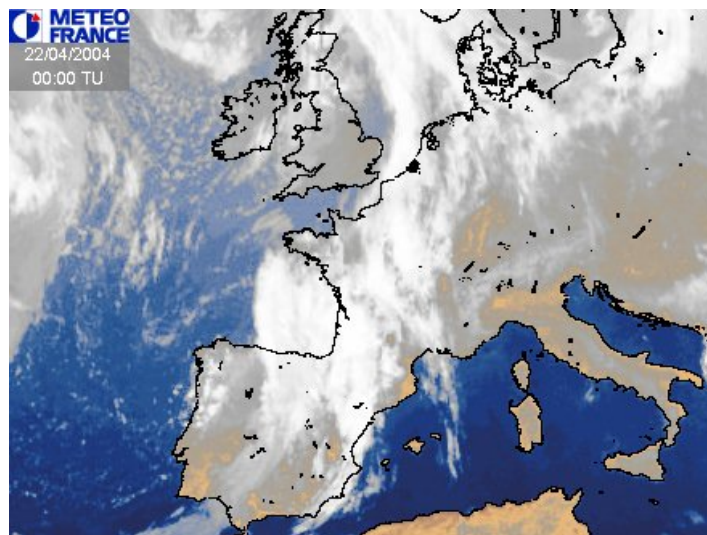
(IRPHE, M. Abid, S. Le Dizès, T. Leweke, P. Meunier, A. Verga)

De nombreux domaines d'application

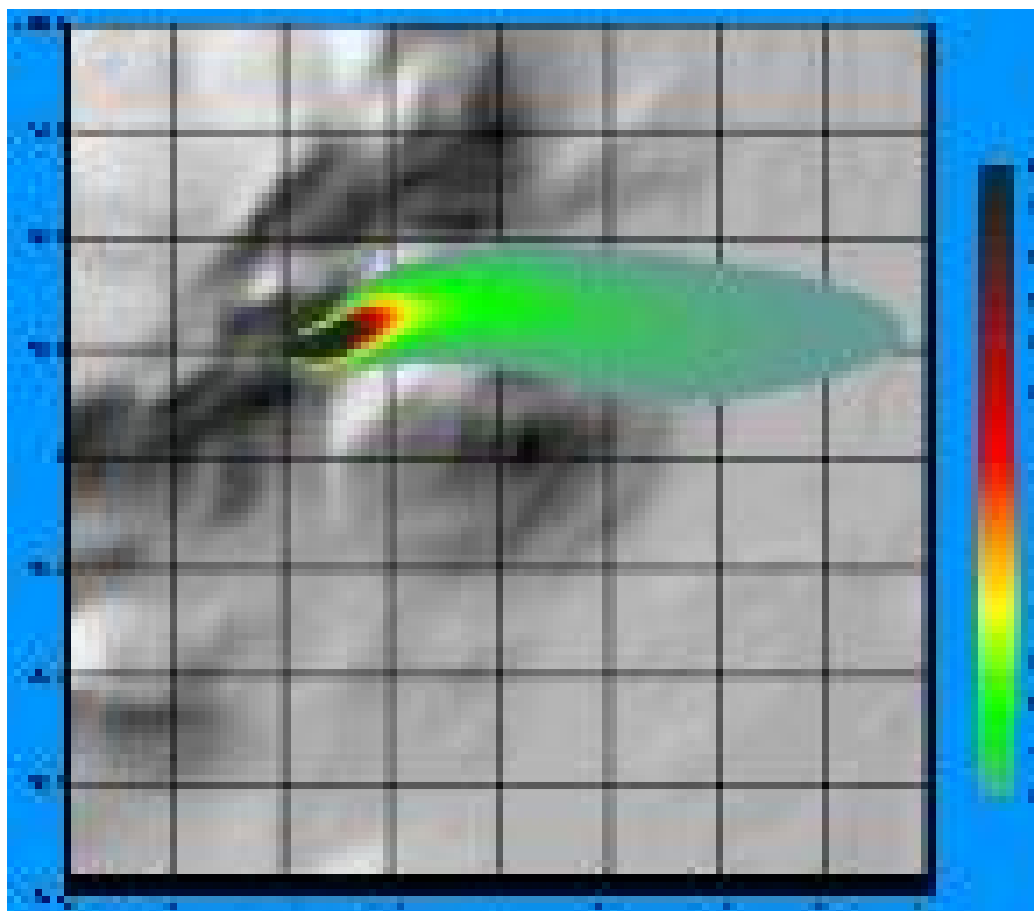
- ✓ météorologie (vents, courants marins,...),
- ✓ pollution (fumées,...),
- ✓ chimie, combustion, (mélanges, moteurs...)
- ✓ transports (hydro et aérodynamisme),
- ✓ astrophysique, (cf. magnétohydrodynamique)
- ✓ sport...

Quelques exemples en image...

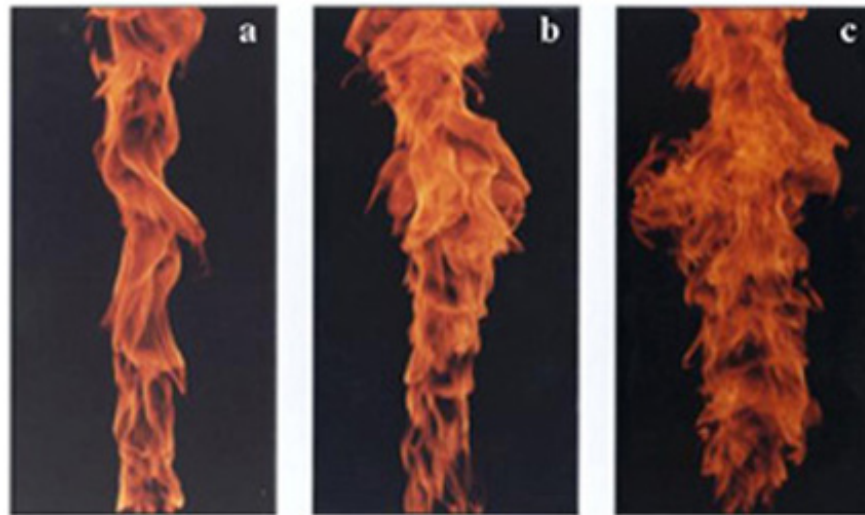
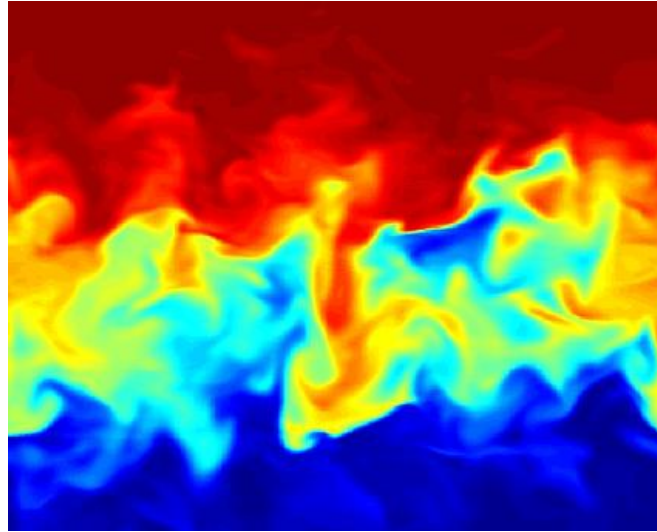
Météo



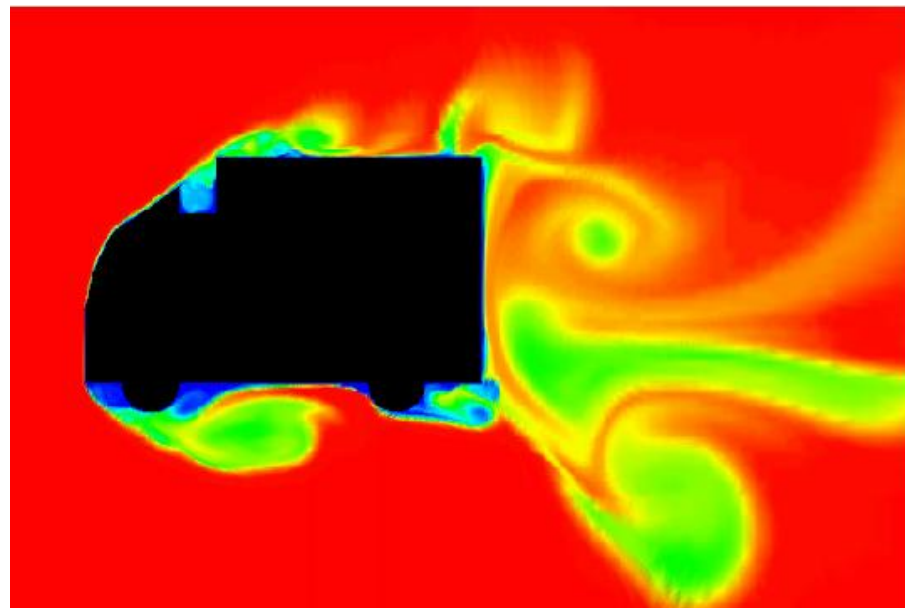
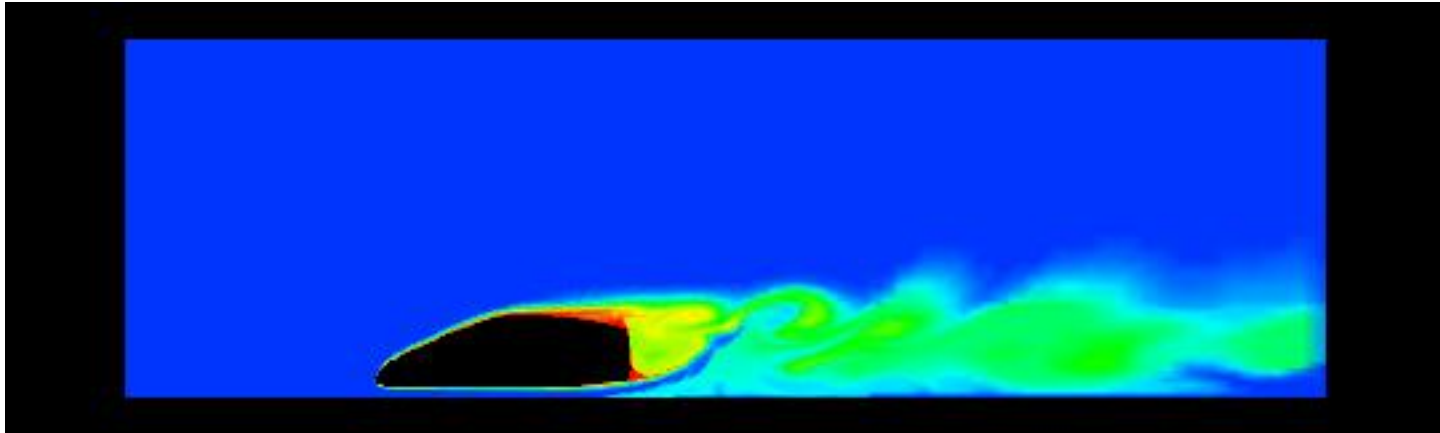
Pollution



Mélange, combustion...



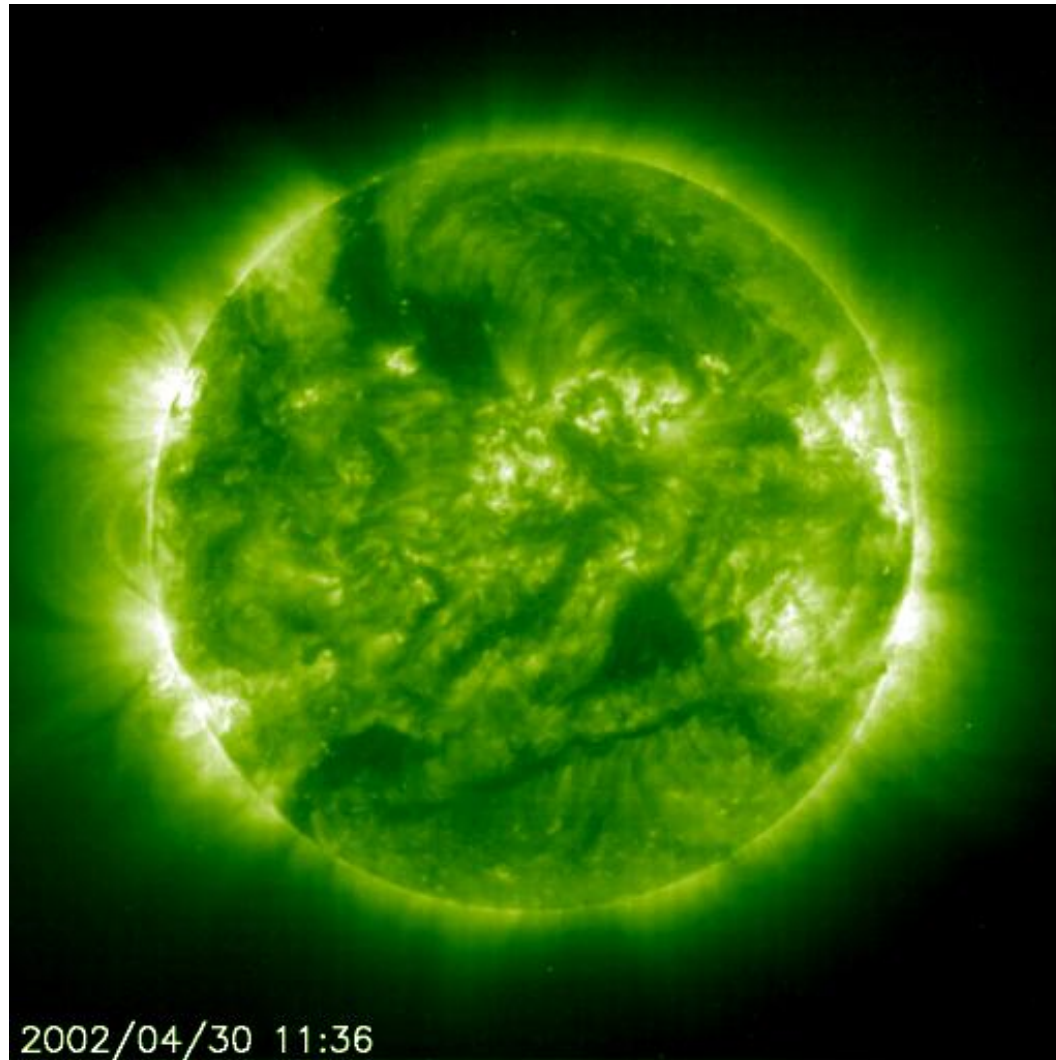
Voiture, camion,...



Avions



Astrophysique



Sport



Au laboratoire, *pour de vrai* !



Turbulence développée : $Re \gg Re_c$

- ✎ études expérimentales lourdes et coûteuses,
- ✎ simulations numériques longues et coûteuses (Earth Simulator = 5120 proc., 10^4 Go !!),
- ✎ approches théoriques limitées...

Pb = trop grand nombre de degrés de liberté

Turbulence développée : $Re \gg Re_c$

Grande gamme d'échelles :

$$\eta \sim Re^{-3/4} \cdot L \quad \lambda \sim Re^{-1/2} \cdot L \quad L$$

Kolmogorov Taylor intégrale

↓

$$N_{d.d.l.} \sim (Re^{3/4})^3 \sim Re^{9/4}$$

ex : $Re \sim 10^9 \implies N_{d.d.l.} \sim 10^{20}$

(soit 10^{-3} mol...)

Vers une approche statistique...

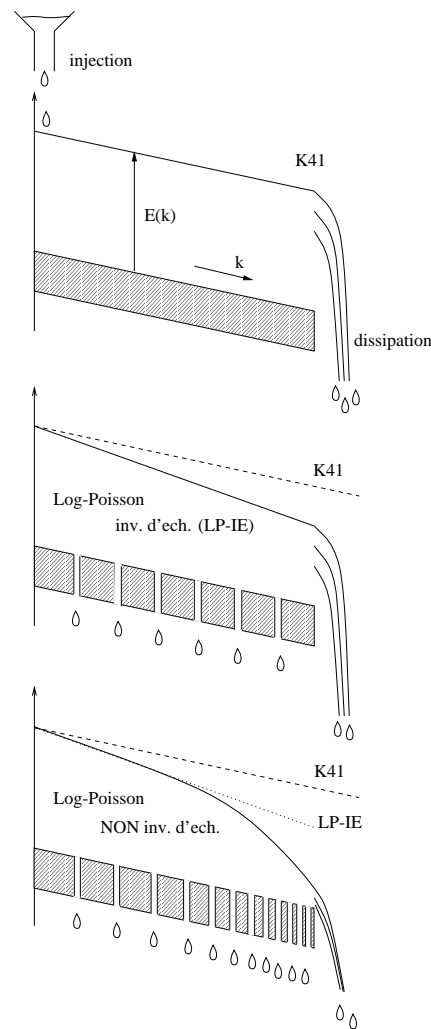
La cascade de Richardson

*"Big whirls have little whirls
That feed on their velocity
And little whirls have lesser whirls
And so on to viscosity"*

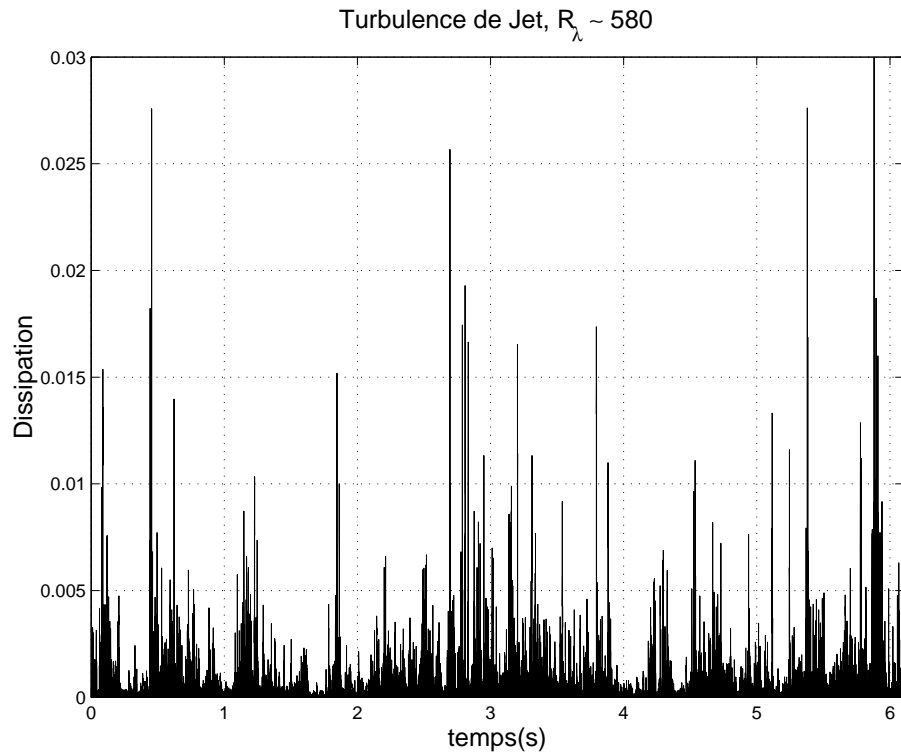
L.F. Richardson (1922)



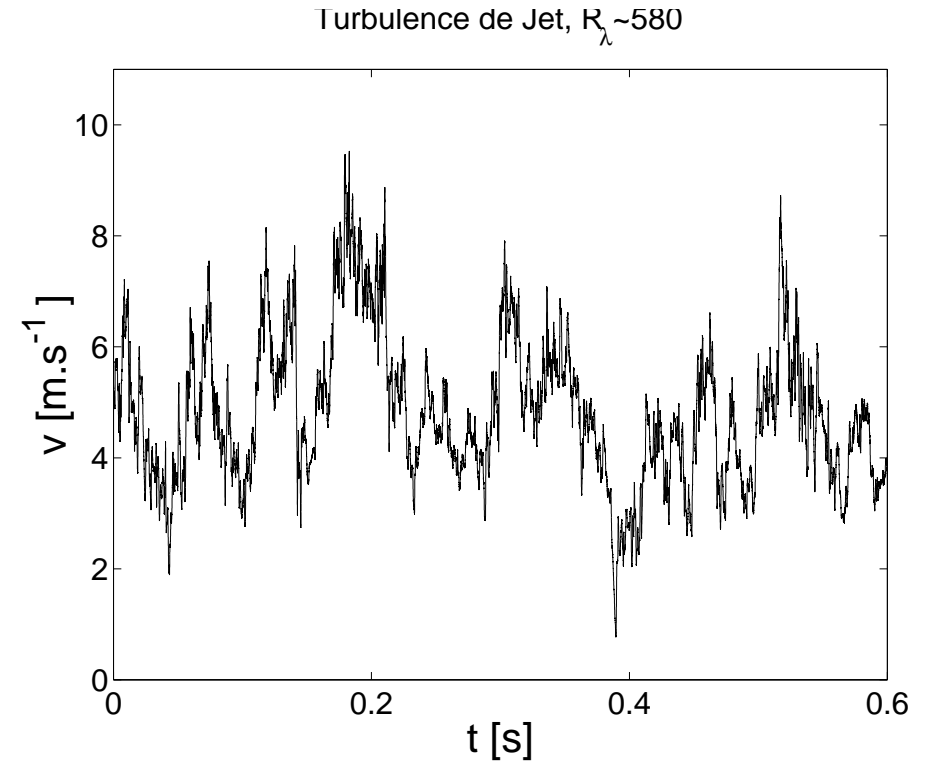
(1881-1953)



Signaux expérimentaux



DISSIPATION ε



VITESSE $v(x_o, t)$

Approches statistiques : de l'auto-similarité...

$$\delta_r v(x) = v(x+r) - v(x)$$

👉 Kármán-Howarth $\langle \delta_r v^3 \rangle = -\frac{4}{5} \bar{\varepsilon} r + 6\nu \frac{\partial \langle \delta_r v^2 \rangle}{\partial r}$

👉 Kolmogorov 1941 $\langle |\delta_r v|^q \rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{q/3} \quad (Re \rightarrow \infty)$



(1903-1987)



AUTO-SIMILARITÉ

$$\delta_{\lambda r} v \stackrel{\text{proba}}{\sim} \lambda^H \delta_r v$$



...au multiscaling

$$(\delta_r v(x) = v(x+r) - v(x))$$

☞ Landau + mesures $\langle |\delta_r v|^q \rangle \propto r^{\zeta(q)}$ où $\zeta(q) \neq q/3$!

☞ Kolmogorov 1962 $\langle |\delta_r v|^q \rangle \propto \underbrace{\langle \varepsilon_r^{q/3} \rangle}_{\sim r^{\tau(q/3)}} r^{q/3} \propto r^{\zeta(q)}$

MULTIFRACTAL

☞ Castaing 1990 $\langle |\delta_r v|^q \rangle \propto \exp[-\mathbf{H}(q) \cdot \mathbf{n}(r)]$

LOG-INF. DIV.

- ✓ analyse multifractale (régularité de fonctions),
- ✓ cascade infiniment divisibles (transferts entre échelles).

Analogie avec la thermodynamique

idée : " signal irrégulier = gaz de singularités "

$$\langle |\delta_r v|^q \rangle \sim \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} |\delta_r v(x_i)|^q \sim \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \exp(q \cdot \ln |\delta_r v(x_i)|)$$

évoque une fonction de partition $Z(\beta, V) = \sum_i \exp(-\beta E_i)$

en faisant l'analogie :

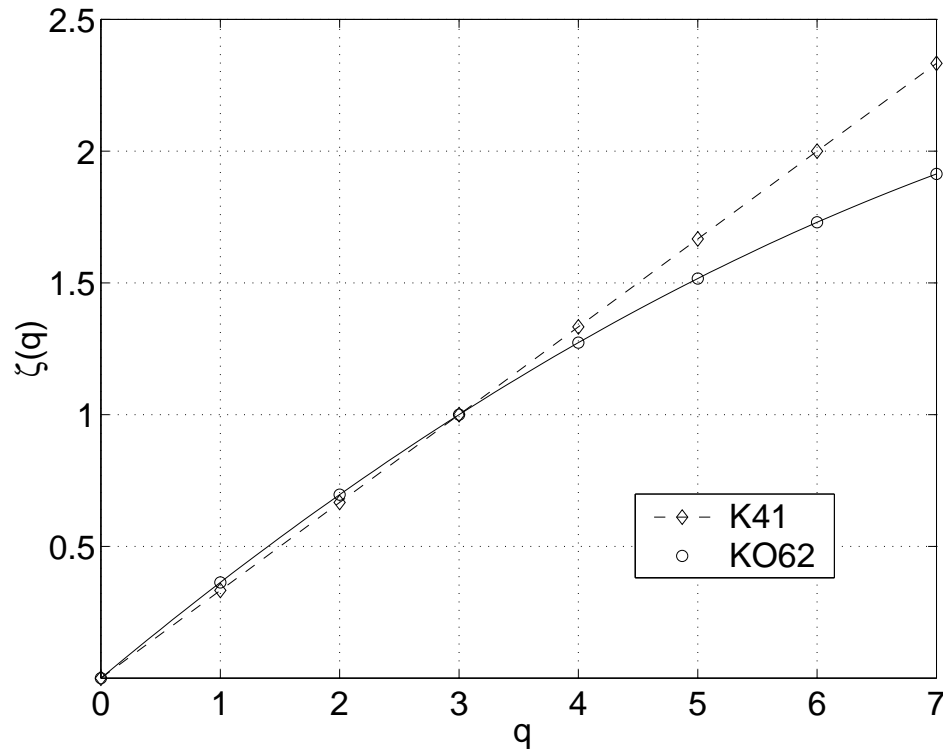
$$\begin{cases} N_x & \rightarrow V, \\ q & \rightarrow \beta \propto 1/T, \\ \ln |\delta_r v(x_i)| & \rightarrow -E_i \end{cases}$$

De plus,

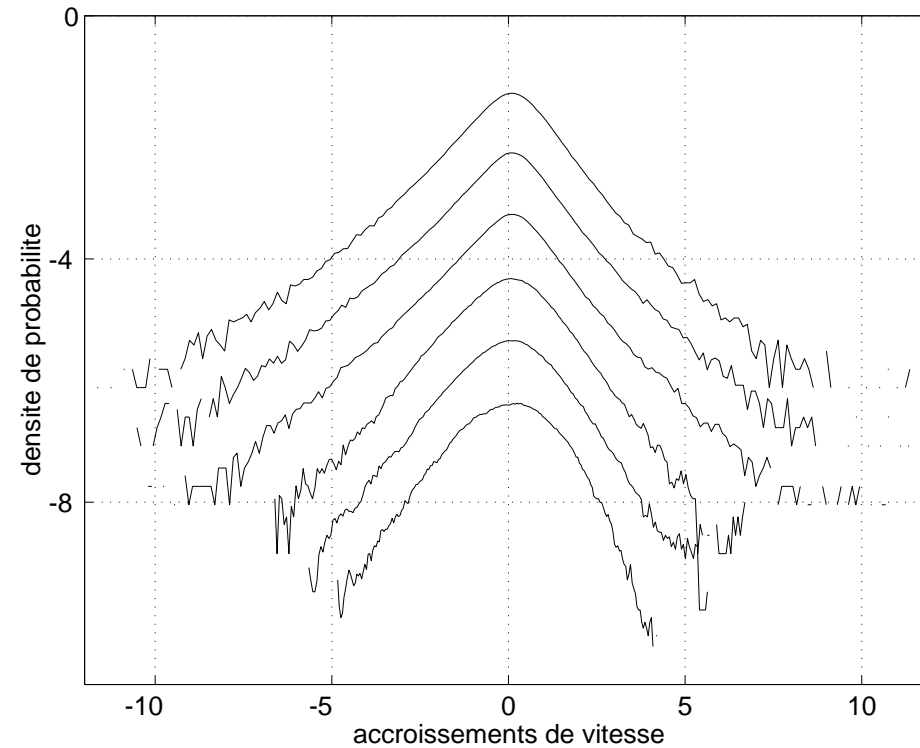
$$\zeta(q) \xrightarrow{\text{transformée de Legendre}} D(h)$$

où $D(h)$ = spectre de singularité, $h \sim$ énergie moyenne, $D(h) \sim$ entropie...

Intermittence = écart à l'auto-similarité

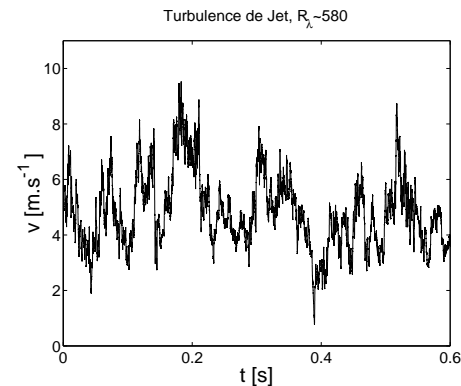
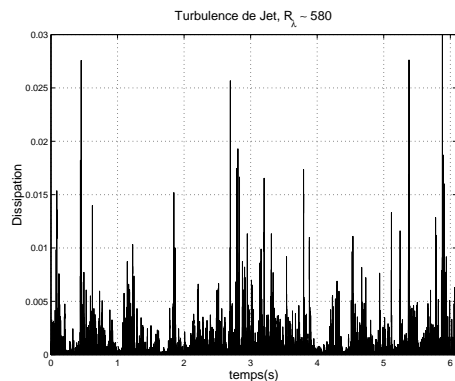


$$\zeta(q) \neq \frac{q}{3}$$



ÉVOLUTION DES PDF

Champ de recherche



$$\begin{array}{cc}
 \text{dissipation} & \varepsilon \\
 \frac{1}{r} \int_{x-r/2}^{x+r/2} \varepsilon dx \Rightarrow \langle \varepsilon_r^q \rangle \sim ?? & \text{vitesse} \quad v(x_o, t) \\
 & v(x+r) - v(x) \Rightarrow \langle |\delta_r v|^q \rangle \sim ??
 \end{array}$$

Comment construire artificiellement de tels "objets" ?

\Rightarrow cascades multiplicatives et processus aléatoires...

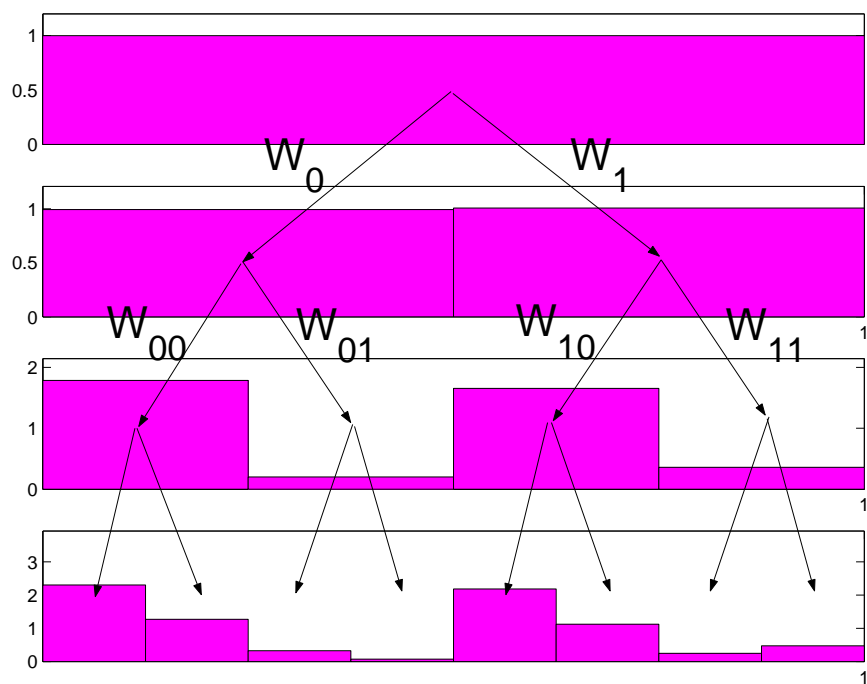
(à 1D, puis peut-être 2D, puis 3D...)

Cascades multiplicatives binomiales

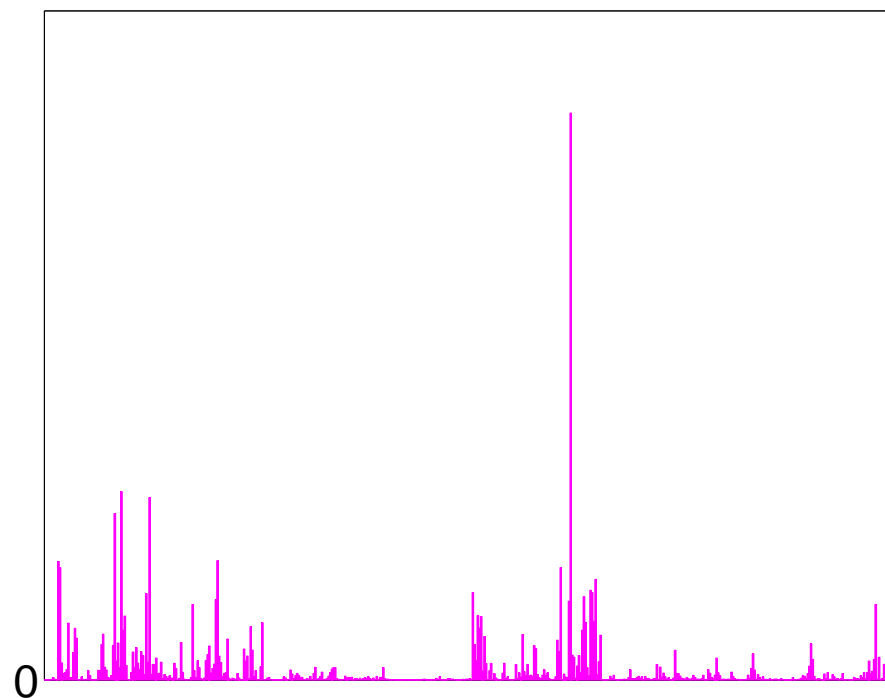
(Yaglom 1966, Mandelbrot 1974, inspirés par Richardson 1922)

(idée = construire ε puis v)

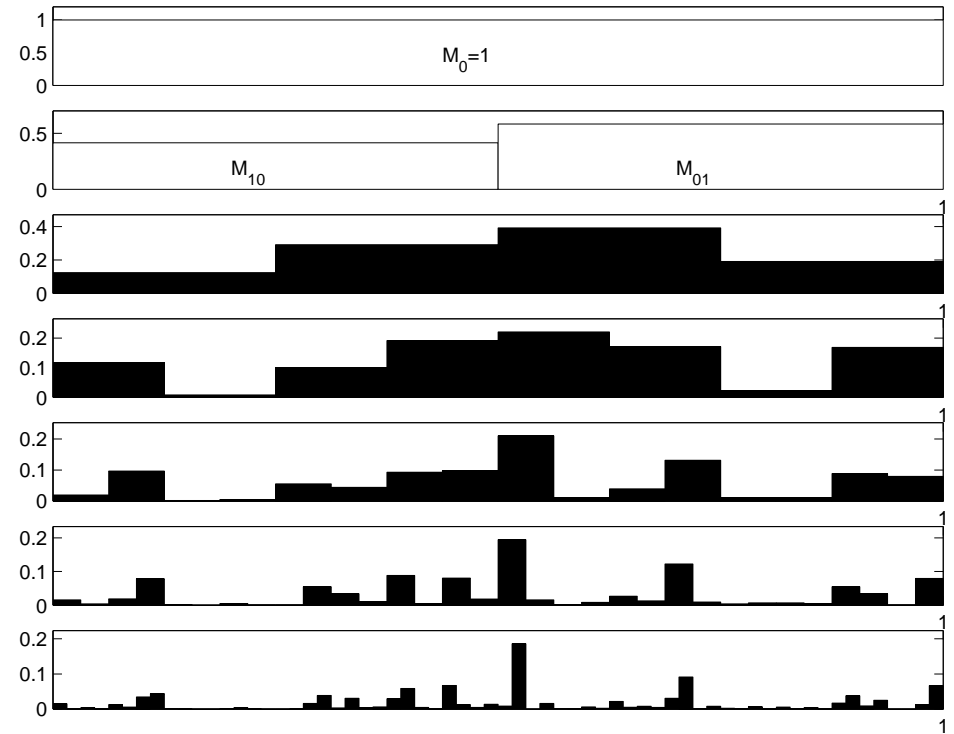
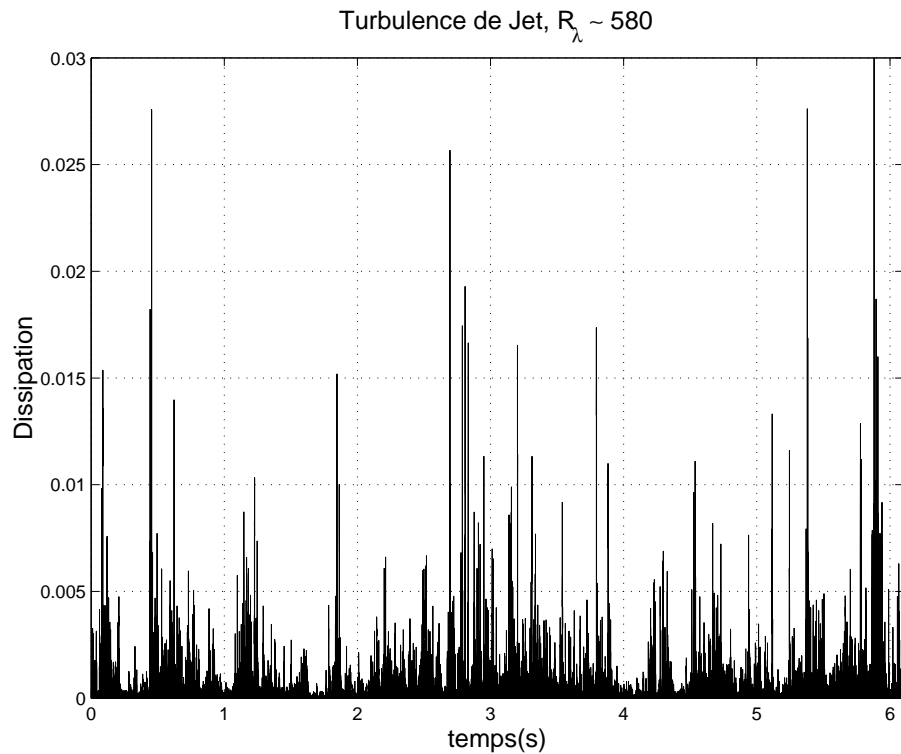
structure arborescente



signal irrégulier



dissipation \sim cascade binomiale



Pb : rapport 2 privilégié, pas stationnaire...

De l'auto-similarité aux Cascades Infiniment Divisibles

$$\delta_\tau X(t) = X(t + \tau) - X(t)$$

☛ AUTO-SIMILARITÉ

$$\langle |\delta_\tau X|^q \rangle = \langle |X(1)|^q \rangle \cdot |\tau|^{qH}$$

ex : f.B.m., Linear Fractional Stable Motion...

☛ FORMALISME MULTIFRACTAL

$$\langle |\delta_\tau X|^q \rangle = c_q \tau^{\zeta(q)}$$

ex : casc. binomiales, casc. aléa. ondelette, multifractal random walk (MRW)...

☛ CASCADES INF. DIVISIBLES

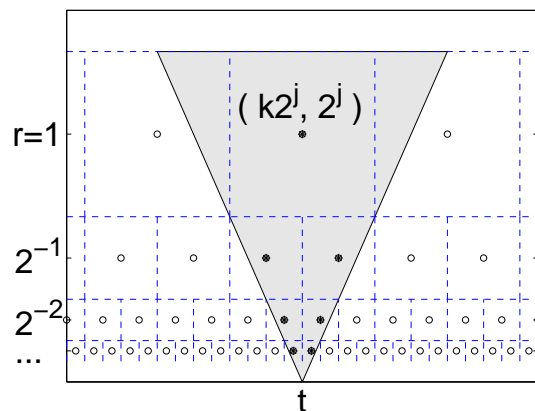
$$\langle |\delta_\tau X|^q \rangle = c_q \exp[-H(q) \cdot n(\tau)]$$

- $H(q) \equiv \zeta(q)$ si $n(\tau) = -\log \tau$,
(multifractal)
- a priori $n(\tau) \neq -\log \tau$.

ex : ... ???

Des cascades binomiales aux cascades infiniment divisibles

binomiale

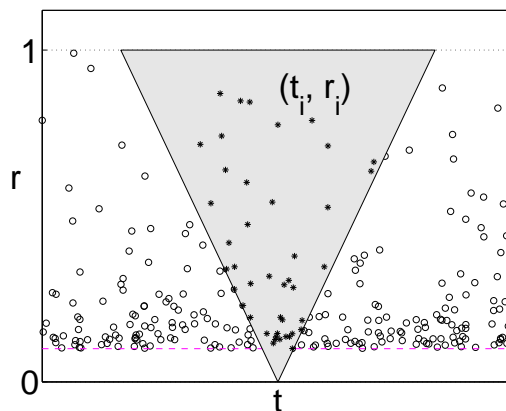


$$Q_r(t) = \prod_j \Lambda_j(t),$$

$r = 2^j$ seulement

Mandelbrot 1974

Poisson composée



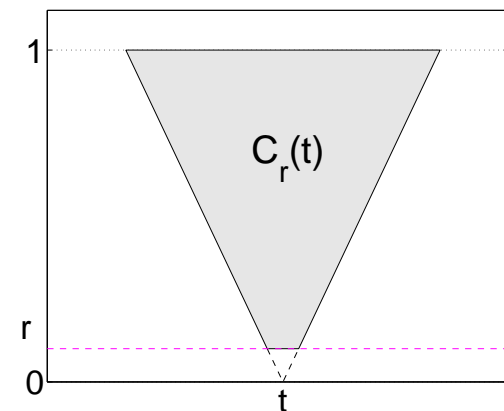
$$Q_r(t) \propto \prod_{(t_i, r_i)} W_i$$

t_i : uniforme \Rightarrow stationnaire

r_i : $1/r^2 \Rightarrow$ scaling

Barral & Mandelbrot 2002

Infiniment Divisible



$$Q_r(t) \propto \exp M(C_r(t))$$

CASCADE MULT.

CONTINUE

Schmitt & Marsan 2001

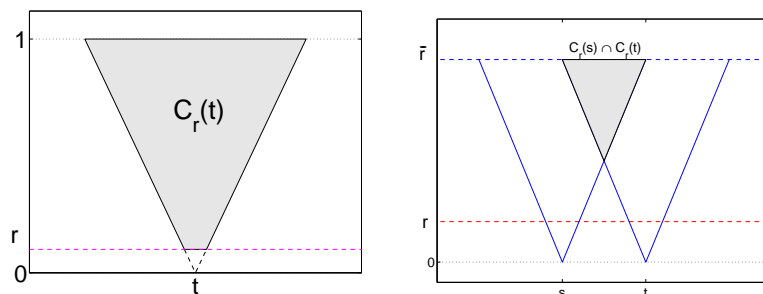
Muzy & Bacry 2002

Ch. & Riedi & Abry 2003

Bruit log-infiniment divisible (IDC noise)

$\mathbf{M}(\mathcal{C}_r(\mathbf{t}))$: fct. génér. moments = $\exp[-m(\mathcal{C}_r) \rho(q)]$ (inv. éch. = $r\rho(q)$)

$$Q_r(t) = \frac{\exp[M(\mathcal{C}_r(t))]}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_r(t))]}$$



$\implies Q_r(t)$ est stationnaire

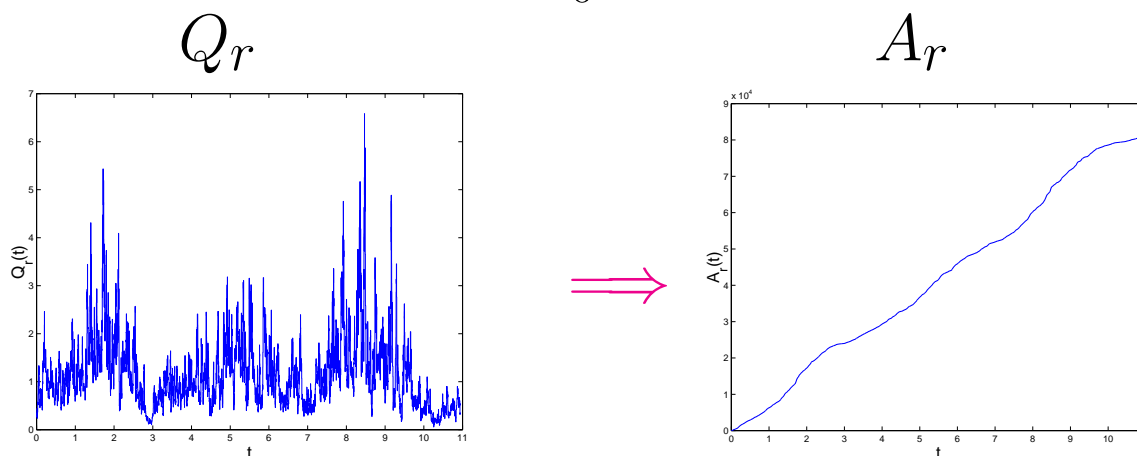
$$\varphi(q) = \rho(q) - q\rho(1) \implies \langle Q_r^q \rangle = \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_r)]$$

$$\text{Cas part. : } \langle Q_r^q \rangle = r\varphi(q)$$

Mouvement log-infiniment divisible (IDC motion)

Pb : Q_r dégénère lorsque $r \rightarrow 0 \dots$

Solution : $A_r(t) = \int_0^t Q_r(s) ds \implies \mathbb{E}A_r(t) = t$



$A(t) = \lim_{r \rightarrow 0} A_r(t) \dots$ est à accroissements stationnaires

et $\langle \delta_\tau A^q \rangle \sim \tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)]$

Cascades infiniment divisibles et dissipation

$$\text{dissipation moyennée localement} \quad \equiv \quad \varepsilon_{\tau}(t) = \frac{[A(t + \tau) - A(t)]}{\tau}$$

$$[\text{en pratique : } \varepsilon_{\tau}^{(r)}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} Q_r(t) dt]$$

Scaling des moments \equiv lois d'échelle Inf. Div.

$$\langle \varepsilon_{\tau}^q \rangle \sim \exp[-\varphi(q) \cdot m(\mathcal{C}_{\tau})] \equiv \exp[-\mathbf{H}(q) \cdot \mathbf{n}(\tau)]$$

$$\text{Cas part. : } \langle \varepsilon_{\tau}^q \rangle \sim r^{\tau(q)}$$

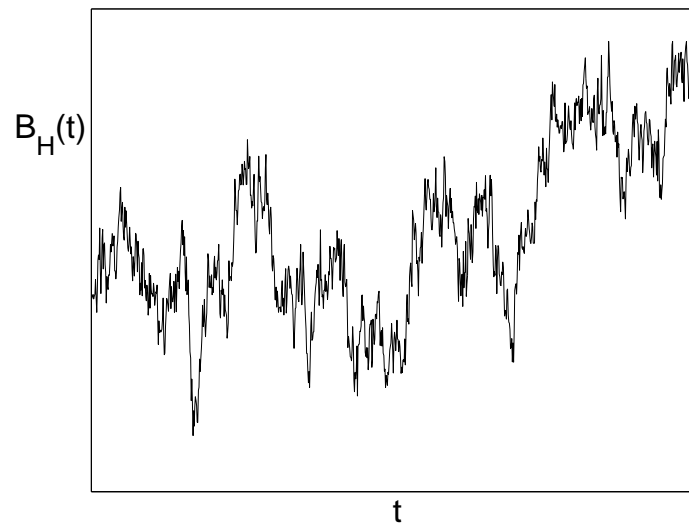
\implies **un bon modèle !**

Et pour la vitesse ?

modèle de base = mouvement **B**rownien **f**ractionnaire B_H

$$\left\{ \begin{array}{l} B_H \text{ est à accroissements stationnaires} \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \langle |B_H(t)|^q \rangle = t^{qH} \cdot \langle |B_H(1)|^q \rangle, \end{array} \right.$$

$$H = 1/3 \Leftrightarrow \text{Kolmogorov 1941}$$



Marche aléatoire infiniment divisible (IDC random walk)

mouvement Brownien fractionnaire B_H , $A(t)$ une mesure Log. Inf. Div.,

$$V_H(t) = B_H(A(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Rappel} \left\{ \begin{array}{l} \langle \delta_\tau A^q \rangle \sim \tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)] \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \langle |B_H(t)|^q \rangle = t^{qH} \cdot \langle |B_H(1)|^q \rangle, \end{array} \right.$$

V_H est à accroissements stationnaires,
fluctuations positives/négatives,

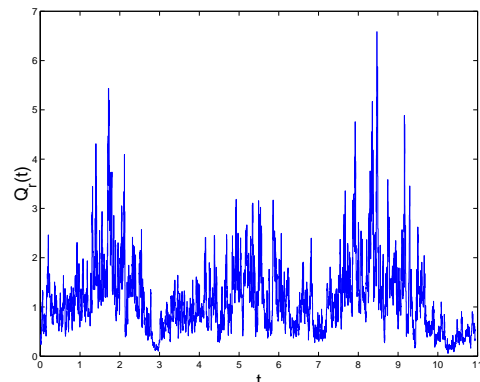
et

$$\langle |\delta_\tau V_H|^q \rangle \sim \tau^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

$$\text{Cas part. : } \langle |\delta_\tau V_H|^q \rangle \sim \tau^{qH + \varphi(qH)}$$

En résumé...

bruit
(densité)

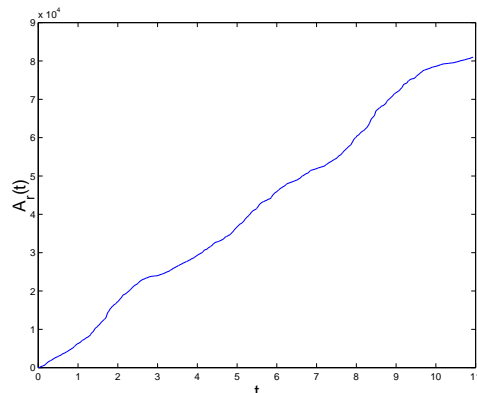


$$\mathbb{E}[Q_r^q]$$

||

$$\exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_r)]$$

mouvement
(mesure)

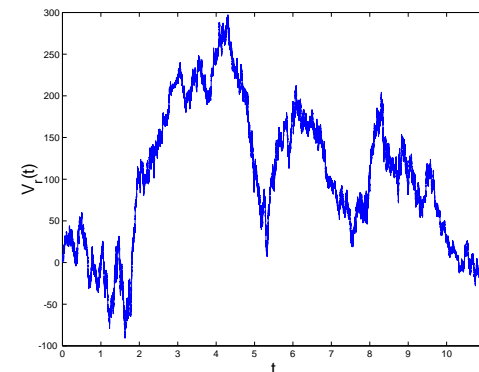


$$\mathbb{E}\delta_\tau A^q$$

≠

$$\tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

marche
aléatoire



$$\mathbb{E}|\delta_\tau V_H|^q$$

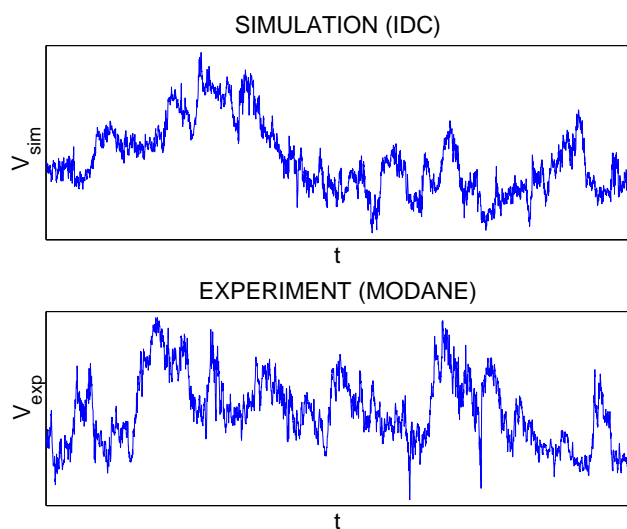
≠

$$\tau^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]$$

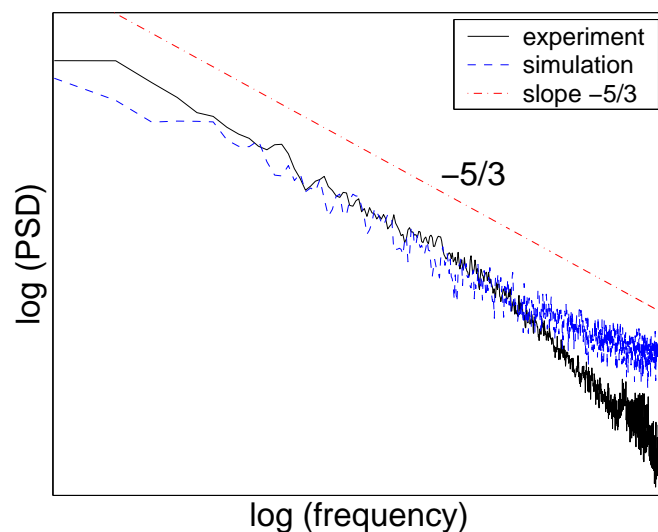
- temps continu ($t \in \mathbb{R}^+$), accroissements stationnaires, invariance d'échelle continue, $\forall \varphi(q)$ d'une distribution Inf. Div.,
- procédures **MATLAB**

Retour à la turbulence "réelle"

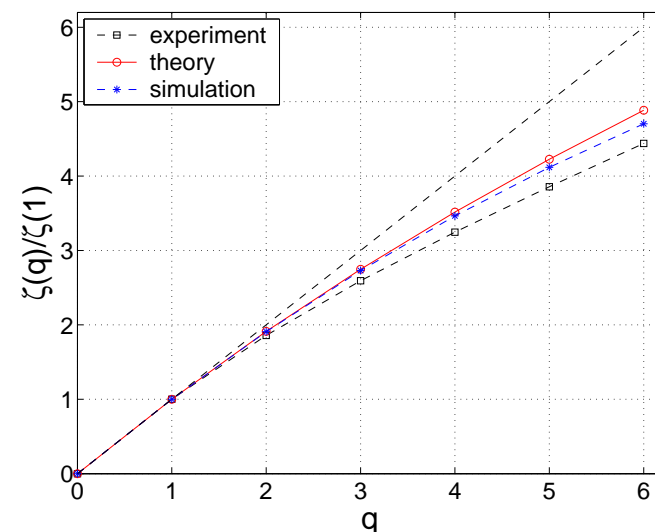
≡ marche aléatoire Log-Inf. Div. V_H versus vitesse v



V_H versus Modane



Spectres



Exposants $\zeta(q)$

⇒ signal artificiel inf. div. = bon modèle

Perspectives : passage à 2D ? 3D ?

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} + \text{scaling}$$

≡

Problème très difficile...

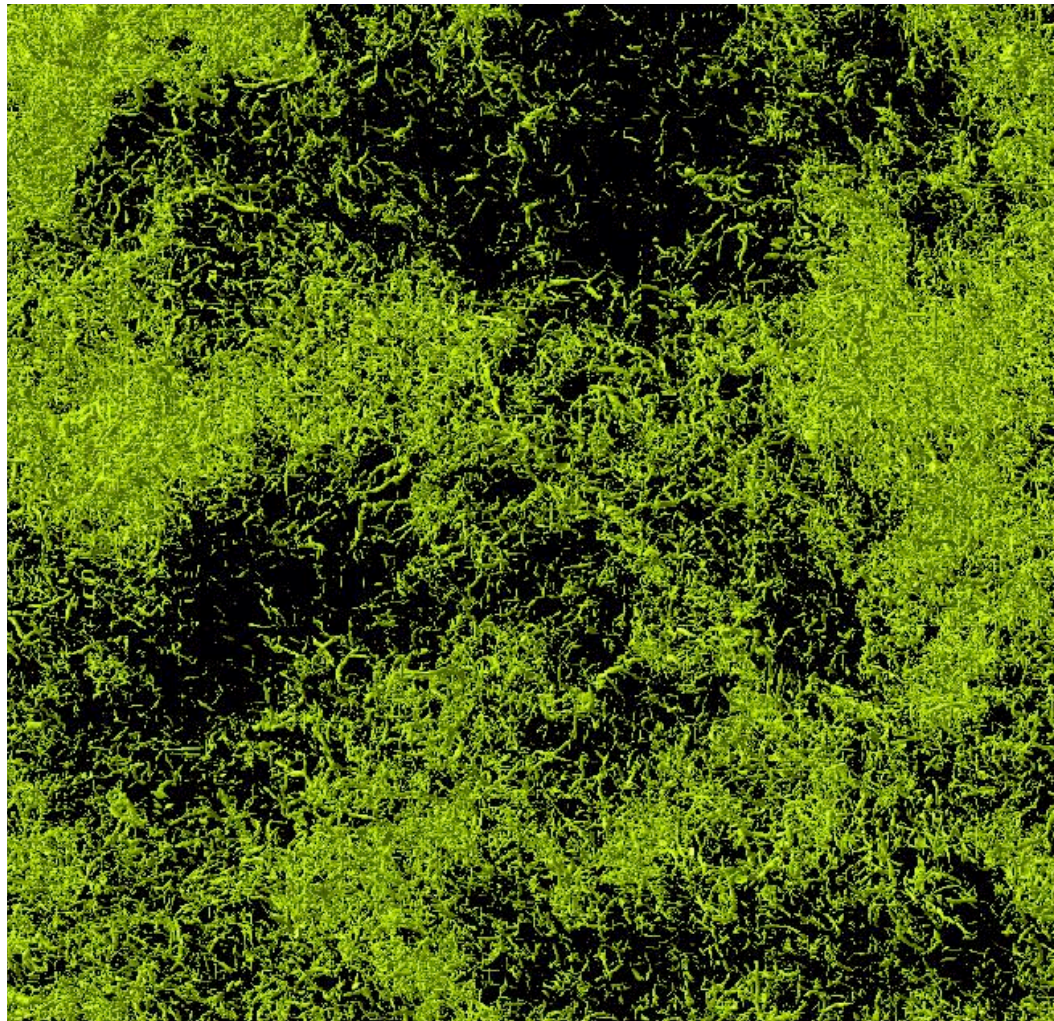
$$\varepsilon(x, y, z) + \text{scaling}$$

≡

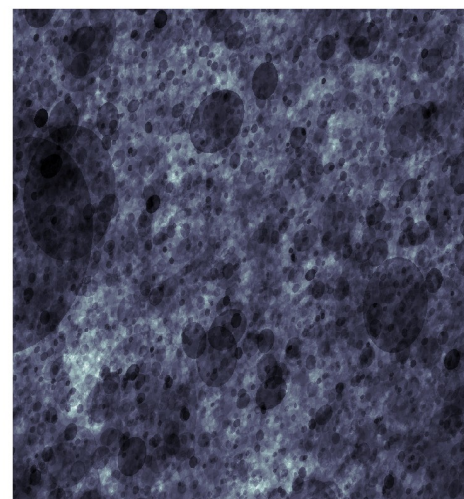
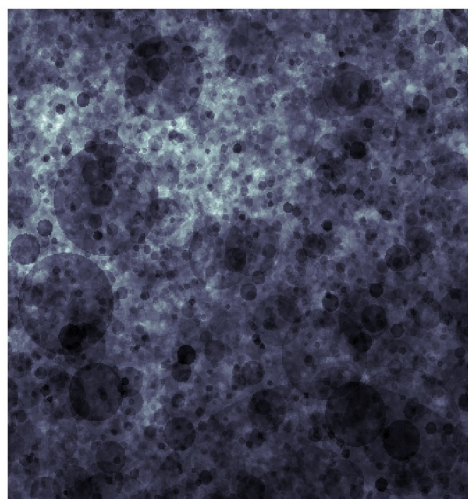
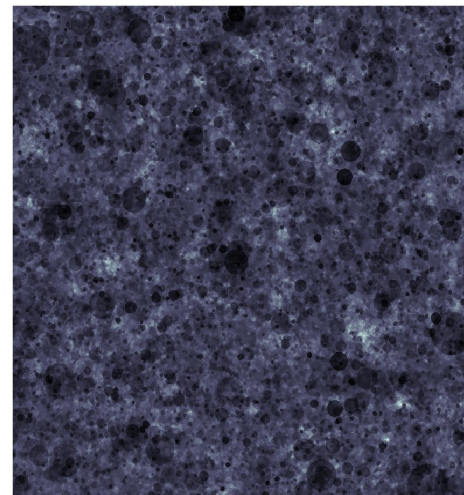
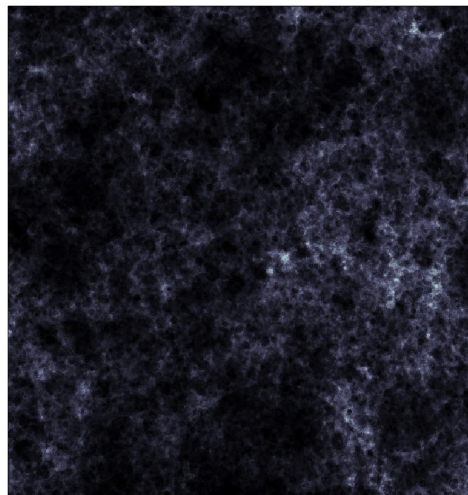
Problème plus accessible !

Simulation directe de la turbulence (Navier-Stokes)

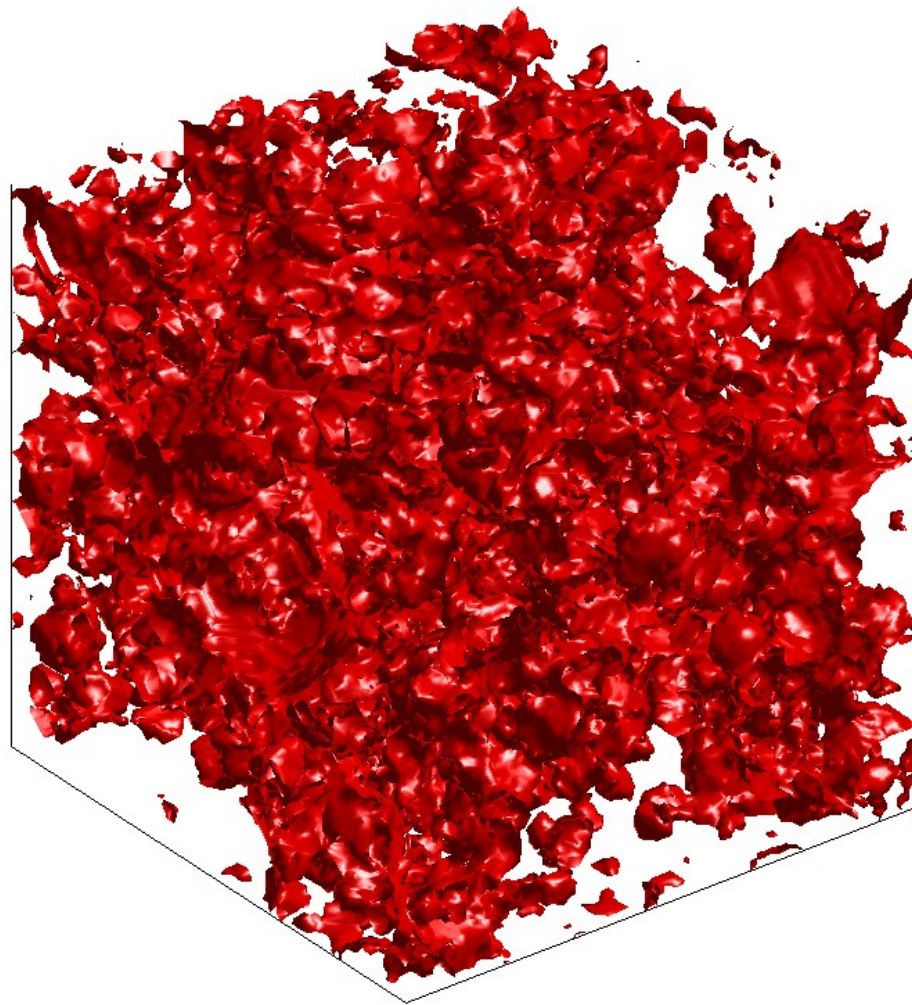
Earth Simulator - Yokokawa et al.



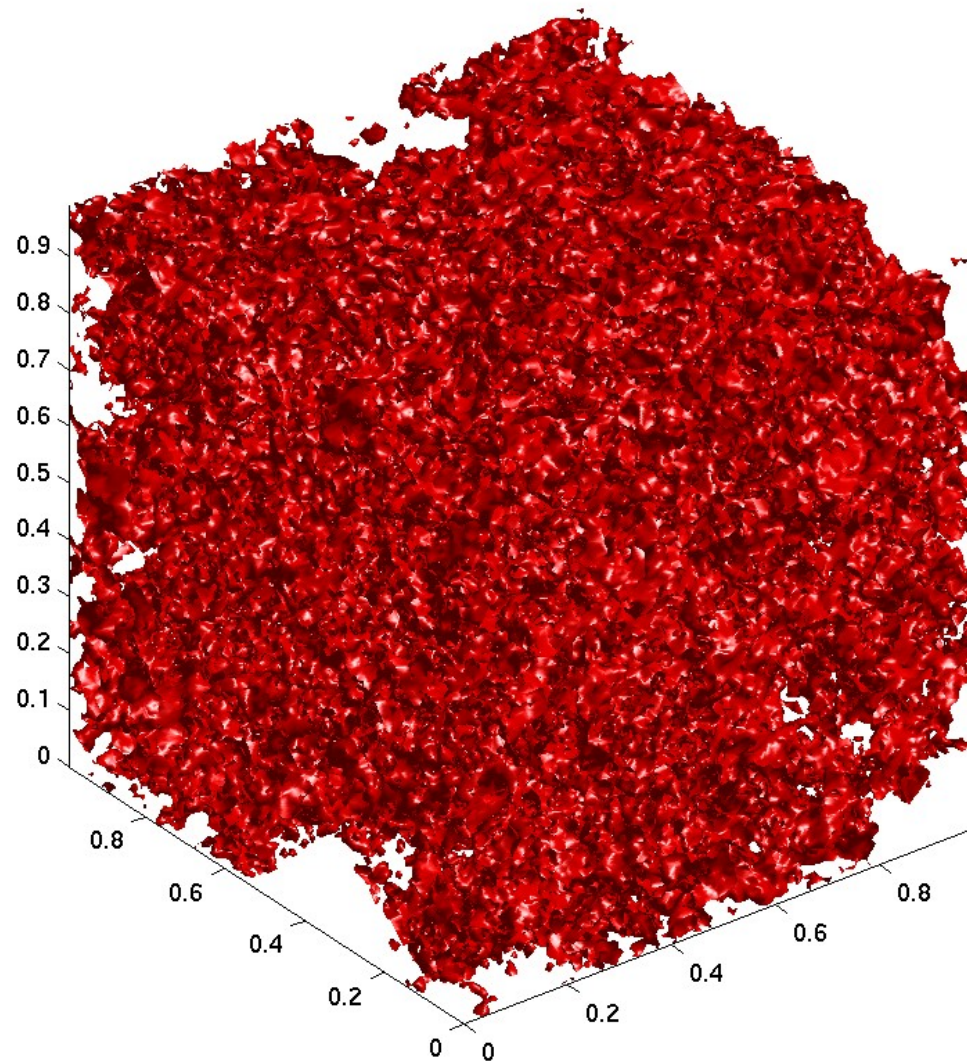
2 D



3 D

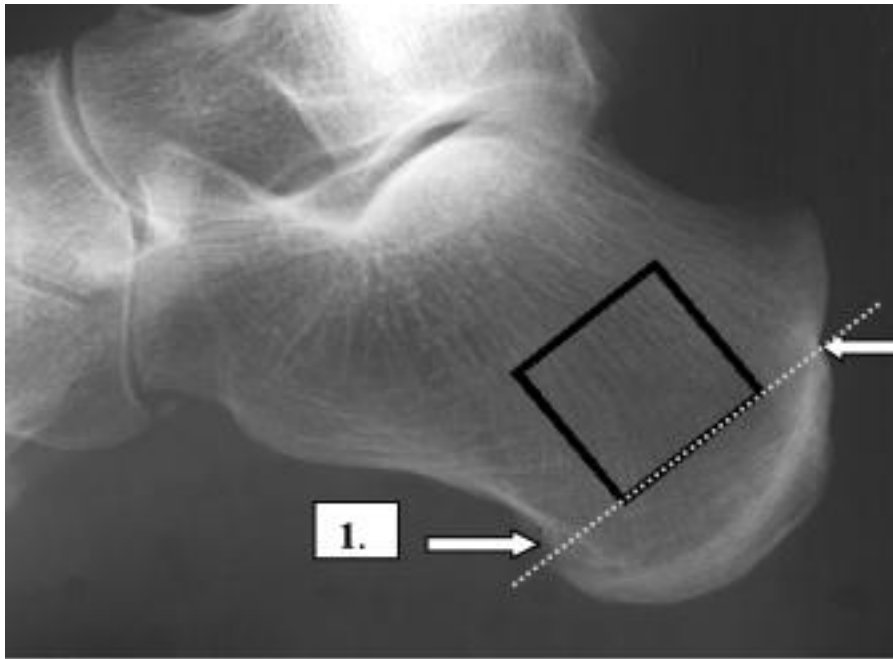


3 D



Vers des applications ailleurs...

ex : radiographie osseuse



2.

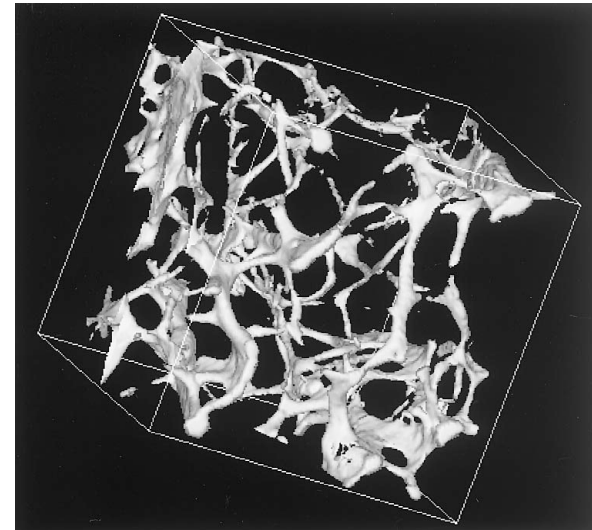


Fig.5. A 3D MR image obtained from a human cadaver spine bone cube (size $12 \times 12 \times 12$ mm) at a spatial resolution of $117 \times 156 \times 300 \mu\text{m}$

Conclusion & Perspectives

Pb difficile et ancien

Enjeux économiques, industriels,
écologiques, scientifiques,...

Recherche fondamentale en turbulence

(théoriciens, expérimentateurs,
numériciens, mathématiciens,
"traiteurs de signaux" (!))

Approche statistique prometteuse

simulation de variables aléatoires
en "oubliant" Navier-Stokes ?

Retombées dans d'autres domaines :
biologie, finance, médecine, sport...