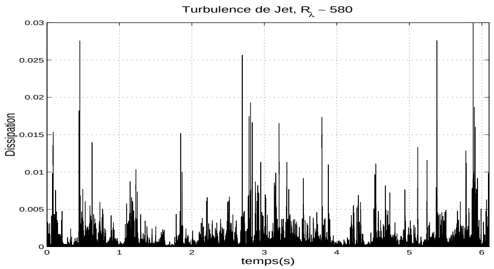
Cascades Infiniment Divisibles voilées : au-delà des lois de puissance

P. Chainais ,
LIMOS UMR 6158,
ISIMA - Univ. Clermont II
Clermont-Ferrand

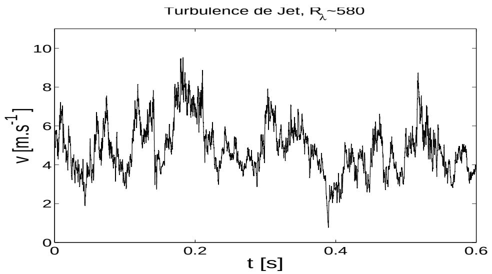
R. Riedi ,
Dept of ECE,
Rice University,
Houston Texas, USA

P. Abry
CNRS UMR 5672,
Laboratoire de Physique,
E.N.S. Lyon

Lois d'échelle et Turbulence



dissipation $\mathbb{E}\varepsilon_r^q \sim r^{\tau(q)}$



vitesse $\mathbb{E}|\delta v_r|^q \sim r^{q/3+\tau(q/3)}$

Analyse

formalisme multifractal ($\sim \tau^{\zeta(q)}$)

casc. log-inf. div. ($H(q) \cdot n(\tau)$)

cascades multiplicatives

$\Rightarrow$ phénoménologie

(cascade de Richardson)

Simulation

cascades binomiales,

coeff. ondelette, MRW...

cascades multiplicatives

$\Rightarrow$ algorithmes

(binomiale, ondelettes...)

De l'auto-similarité aux Cascades Infiniment Divisibles

$$\delta_\tau X(t) = X(t+\tau) - X(t)$$

☛ **AUTO-SIMILARITÉ**

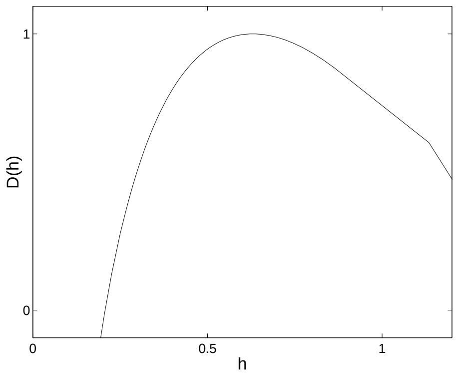
$$\mathbb{E}\,|\delta_\tau X|^q = \mathbb{E}\,|X(1)|^q \cdot |\tau|^{qH}$$

ex : f.B.m., Linear Fractional Stable Motion...

☛ **FORMALISME MULTIFRACTAL**

$$\mathbb{E}\,|\delta_\tau X|^q = c_q\ \tau^{\zeta(q)}$$

ex : casc. binomiales, casc. aléa. ondelette, multifractal random walk (MRW)...



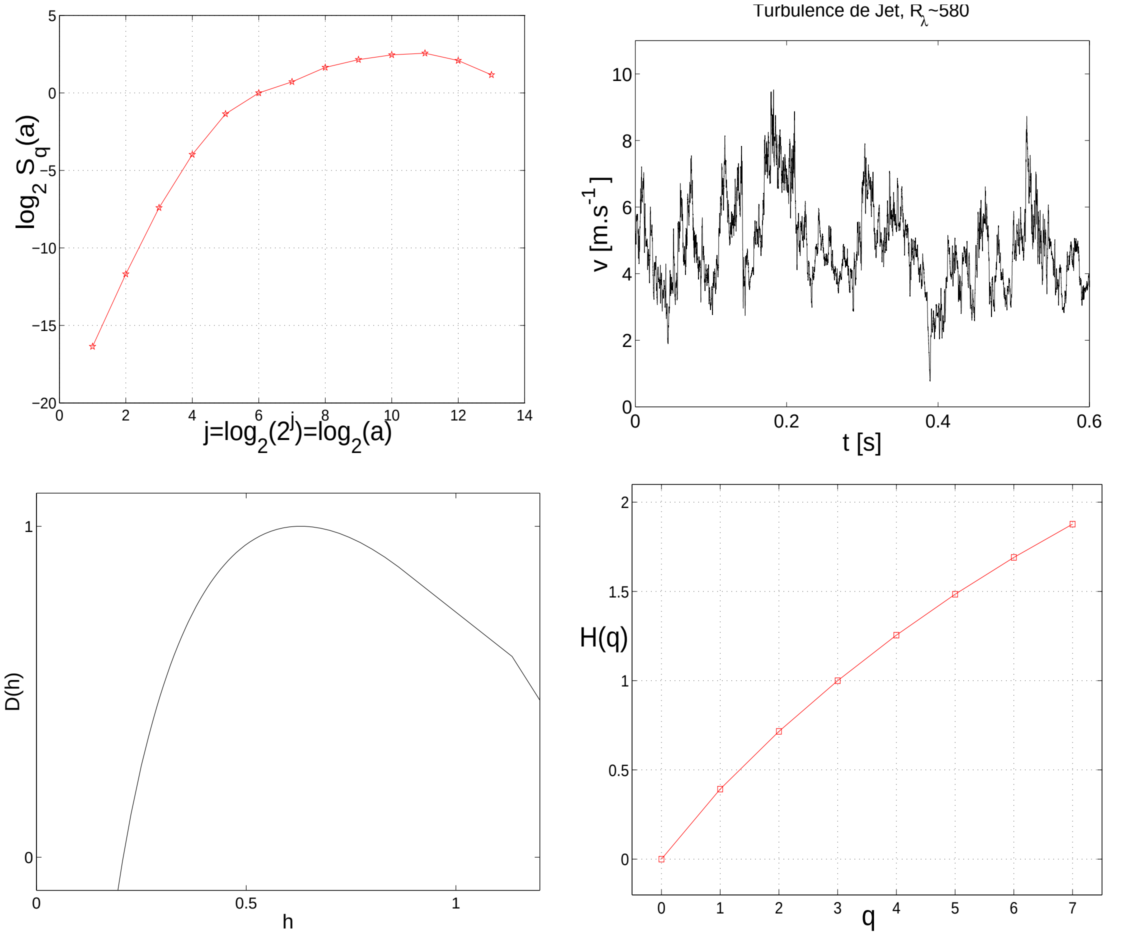
$\Downarrow$

Transformée de Legendre

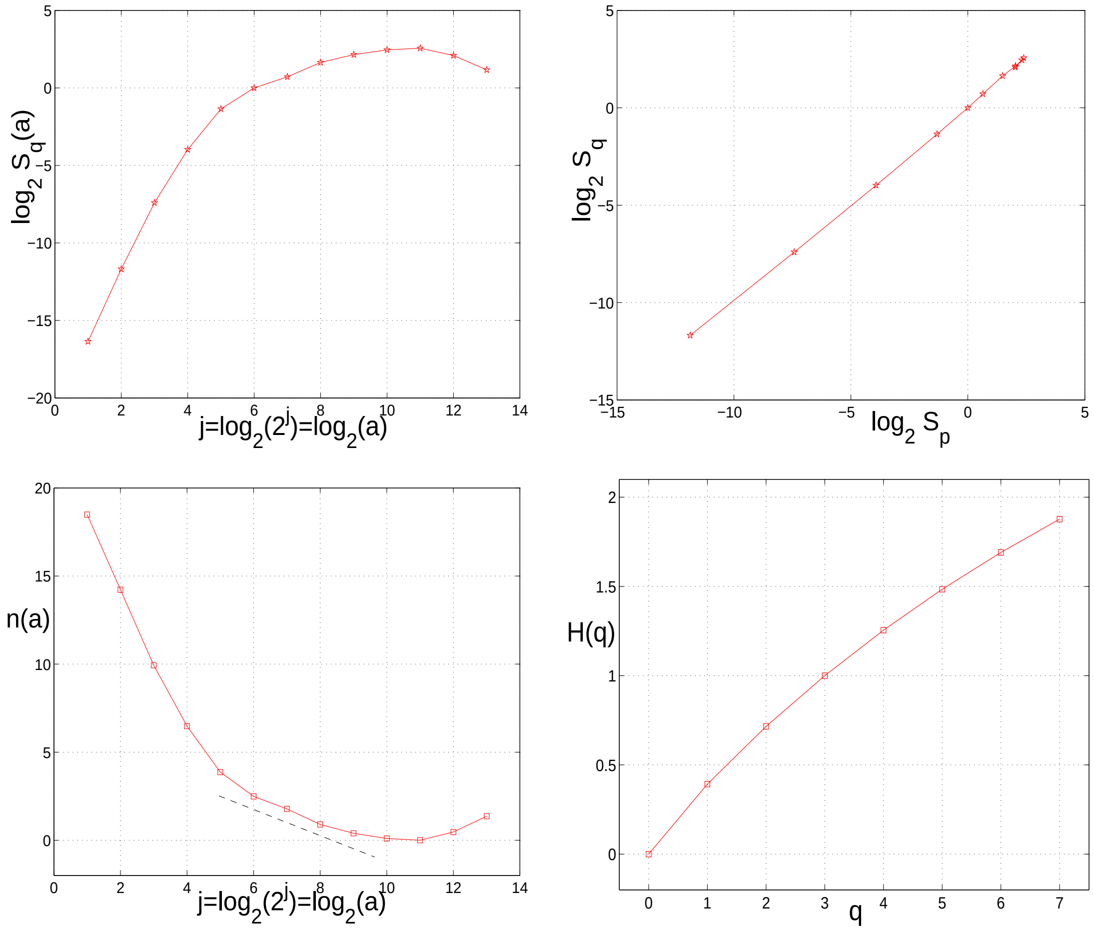
$D(h)$

spectre des singularités

En turbulence...



…vers les cascades infiniment divisibles !



De l'auto-similarité aux Cascades Infiniment Divisibles

$$\delta_\tau X(t) = X(t+\tau) - X(t)$$

☛ **AUTO-SIMILARITÉ**

$$\mathbb{E}\,|\delta_\tau X|^q = \mathbb{E}\,|X(1)|^q \cdot |\tau|^{qH}$$

ex : f.B.m., Linear Fractional Stable Motion...

☛ **FORMALISME MULTIFRACTAL**

$$\mathbb{E}\,|\delta_\tau X|^q = c_q\,\tau^{\zeta(q)}$$

ex : casc. binomiales, casc. aléa. ondelette, multifractal random walk (MRW)...

☛ **CASCADES INF. DIVISIBLES**

$$\mathbb{E}\,|\delta_\tau X|^q = c_q \exp[-H(q)\cdot n(\tau)]$$

- $H(q) \equiv \zeta(q)$ si $n(\tau) = -\log\tau$, (multifractal)
- a priori $n(\tau) \neq -\log\tau$.

ex : . . . ? ? ?

Lois d'échelle infiniment divisibles

$$\mathbb{E}\,|\delta_\tau X|^q = c_q \exp[-H(q)\cdot n(\tau)]$$

✔ $n(\tau) = -\log\tau \implies \mathbb{E}\,|\delta_\tau X|^q = c_q \tau^{H(q)} \equiv c_q \tau^{\zeta(q)}$
(invariance d'échelle)

✔ $n(\tau) \neq -\log\tau \implies$ vers une analyse non-invariante d'échelle :

– turbulence `Castaing et al. 1990`

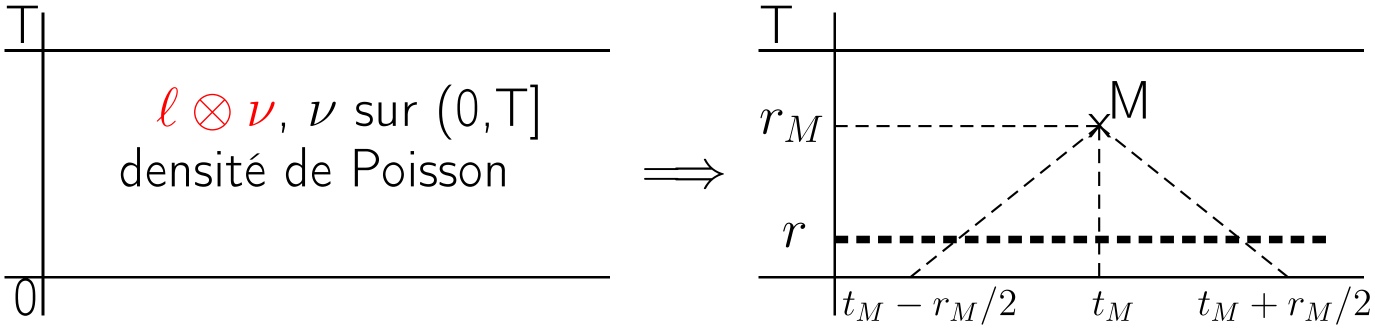
– trafic internet `Veitch et al. 2000`

✔ interprétation multiplicative

Comment construire un signal à lois d'échelle infiniment divisibles ?

possédant de "bonnes propriétés" : *accroissements stationnaires*, etc...

En math : recouvrement Poissonnien de [0,1]



$$S_r = [0,1] \backslash \bigcup_{r_M > r} (t_M - r_M/2, t_M + r_M/2)$$

$$Q_r(t) = \frac{\mathbb{1}_{S_r}(t)}{\mathbb{P}(t \in S_r)} \qquad [\text{ on tue } t \text{ si } t \notin S_r]$$

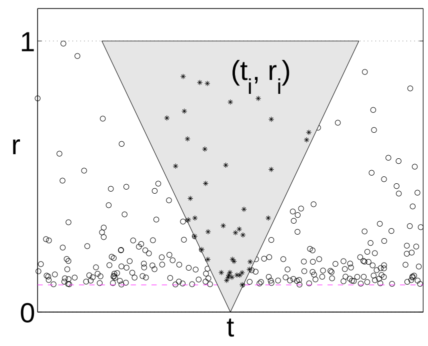
$\mu = \lim_{r \to 0} Q_r(t).\ell$ est portée par $\bigcap_r S_r$

Si μ est non dégénérée, alors tout n'est pas recouvert...

Les points M susceptibles de recouvrir t sont dans $\mathcal{C}_r(t)$.

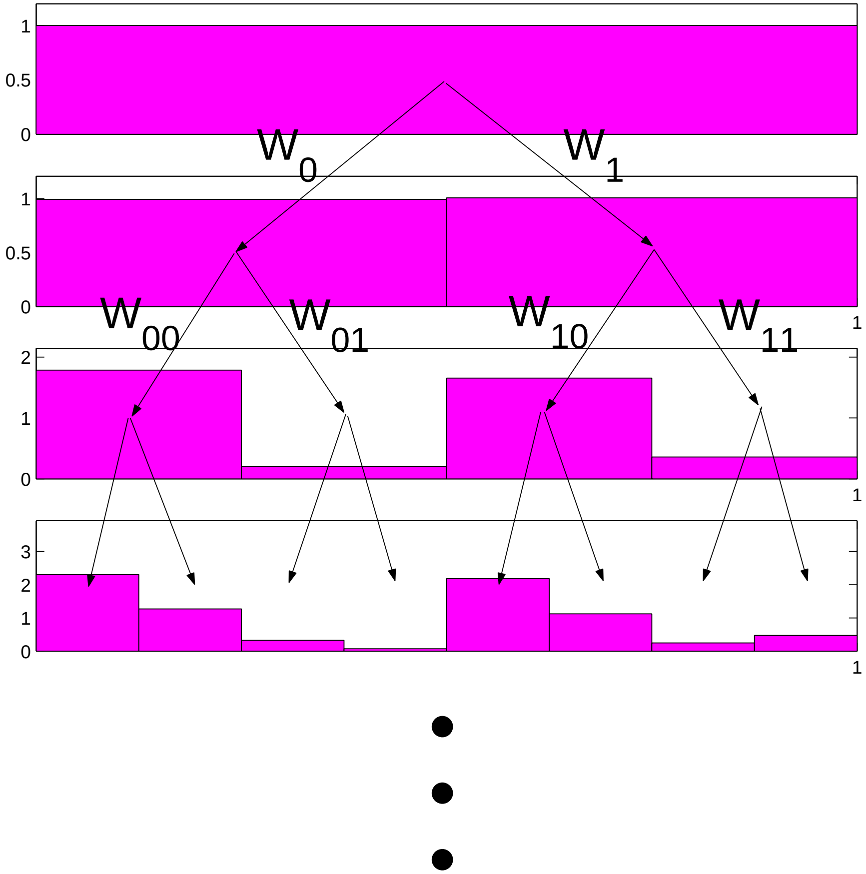
En posant $W_M = 0$,

$$Q_r(t) = \frac{\prod_{M \in \mathcal{C}_r(t)} W_M}{\mathbb{E}\left[\prod_{M \in \mathcal{C}_r(t)} W_M\right]}$$



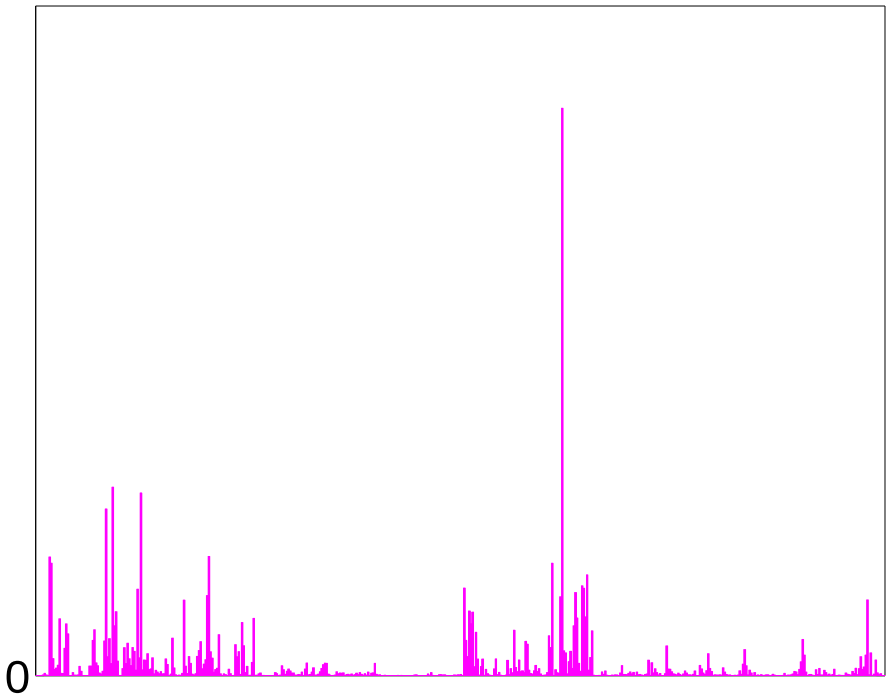
Principe des cascades binomiales

structure arborescente



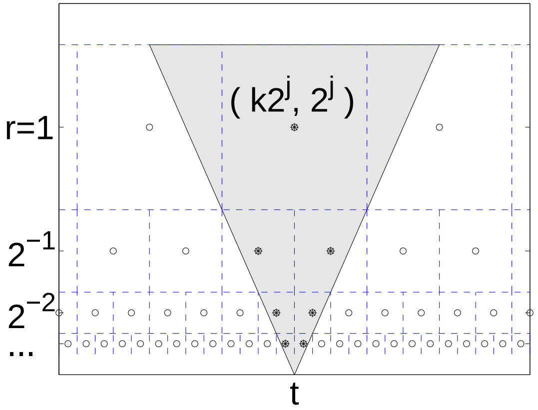
⟹

signal irrégulier



Des cascades binomiales aux cascades infiniment divisibles

binomiale

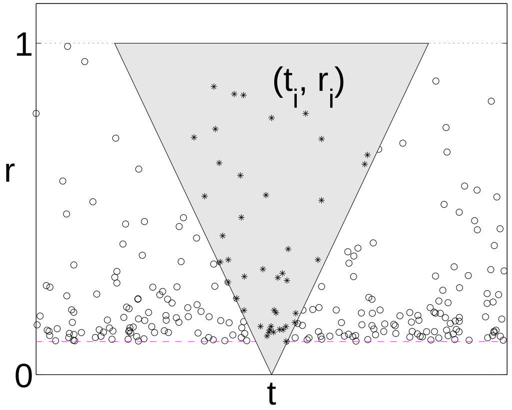


$$Q_r(t) = \prod_j \Lambda_j(t),$$

$r = 2^j$ seulement

Mandelbrot 1974

Poisson composée



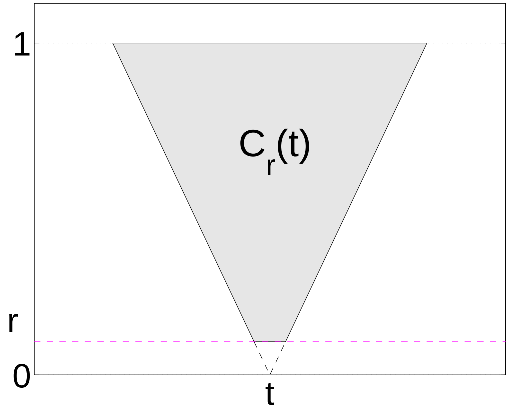
$$Q_r(t) \propto \prod_{(t_i,r_i)} W_i$$

t_i : uniforme $\Rightarrow$ stationnaire

r_i : $1/r^2 \Rightarrow$ scaling

Barral & Mandelbrot 2002

Infiniment Divisible



$$Q_r(t) \propto \exp M(\mathcal{C}_r(t))$$

CASCADE MULT. CONTINUE

Schmitt & Marsan 2001

Muzy & Bacry 2002

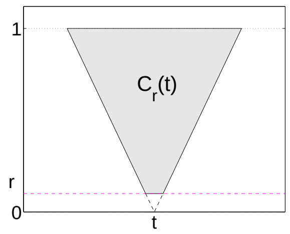
Ch. & Riedi & Abry 2003

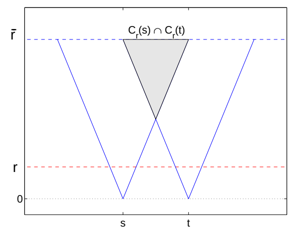
Bruit log-infiniment divisible (IDC noise)

$\mathbf{M}(\mathcal{C}_\mathbf{r}(\mathbf{t}))$: fct. génér. moments $= \exp\left[-m(\mathcal{C}_r)\,\rho(q)\right]$ (inv. éch. $= r^{\rho(q)}$)

- G = distr. infiniment divisible, fct. génér. moments $\tilde{G}(q) = e^{-\rho(q)}$,
- mesure positive $dm(t,r)$ [i. é. $= \frac{(1+\delta(1-r))dt\,dr}{r^2}$],

$$Q_r(t) = \frac{\exp\left[M(\mathcal{C}_r(t))\right]}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_r(t))]}$$





$\Longrightarrow$ $Q_r(t)$ est stationnaire

$$\varphi(q) = \rho(q) - q\rho(1) \Longrightarrow \quad \mathbb{E}[Q_r^q] = \exp\left[-\varphi(q) m(\mathcal{C}_r)\right]$$

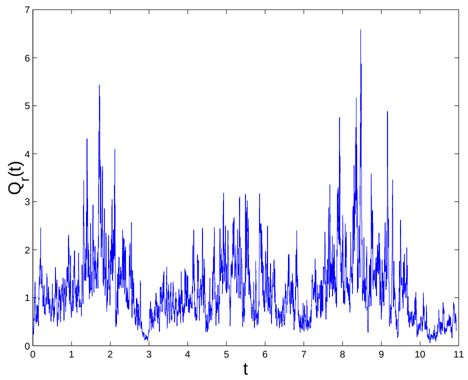
[i.é. $\mathbb{E}[Q_r^q] = e^{-\varphi(q)} \cdot r^{\varphi(q)}$]

Mouvement log-infiniment divisible (IDC motion)

Pb : Q_r dégénère lorsque $r \longrightarrow 0\ldots$

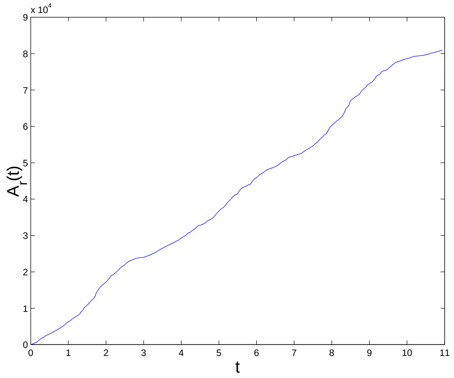
Solution : $A_r(t) = \int_0^t Q_r(s)\,ds \Longrightarrow \mathbb{E}A_r(t) = t$

Q_r



$\Longrightarrow$

A_r



$A(t) = \lim_{r \longrightarrow 0} A_r(t) \quad \ldots$ est à accroissements stationnaires

et $\quad \mathbb{E}\delta_\tau A^q \sim \tau^q \exp\left[-\varphi(q) m(\mathcal{C}_\tau)\right]$

Cascades et lois d'échelle infiniment divisibles

dissipation moyennée localement $\equiv$ $\varepsilon_{\tau}(t) = \dfrac{[A(t+\tau) - A(t)]}{\tau}$

[en pratique : $\varepsilon_{\tau}^{(r)}(t) = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t}^{t+\tau} Q_r(t)dt$]

Scaling des moments $\equiv$ lois d'échelle Inf. Div.

$$\mathbb{E}\varepsilon_{\tau}^{q} \sim \exp\left[-\varphi(q) \cdot m(\mathcal{C}_{\tau})\right] \equiv \exp\left[-\mathbf{H}(q) \cdot \mathbf{n}(\tau)\right]$$

$\Longrightarrow$ synthèse d'une densité à lois d'échelle Inf. Div.

Marche aléatoire infiniment divisible (IDC random walk)

mouvement **B**rownien **f**ractionnaire B_H, $A(t)$ une mesure Log. Inf. Div.,

$$V_H(t) = B_H(A(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Rappel
$$\begin{cases} B_H \text{ est à accroissements stationnaires} \\ \forall\, t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{E}|B_H(t)|^q = t^{qH} \cdot \mathbb{E}|B_H(1)|^q, \end{cases}$$

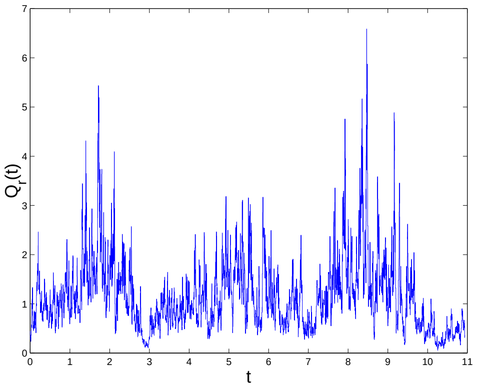
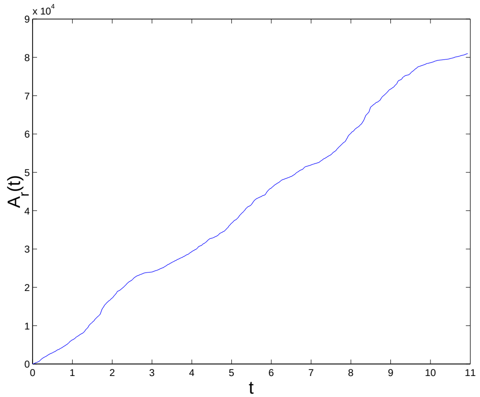
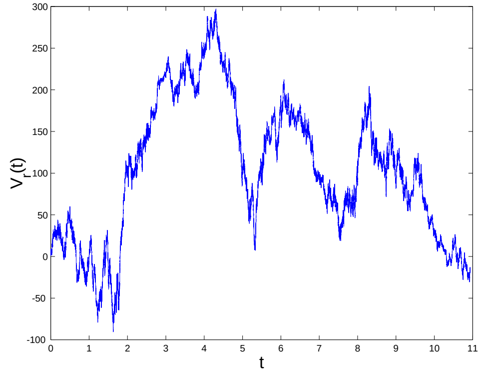
V_H est à accroissements stationnaires,

fluctuations positives/négatives,

et

$$\mathbb{E}|\delta_\tau V_H|^q \sim \tau^{qH} \exp\left[-\varphi(qH) m(\mathcal{C}_\tau)\right]$$

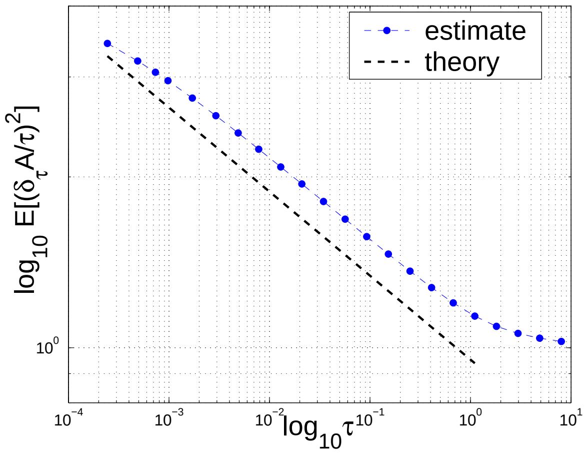
En résumé...

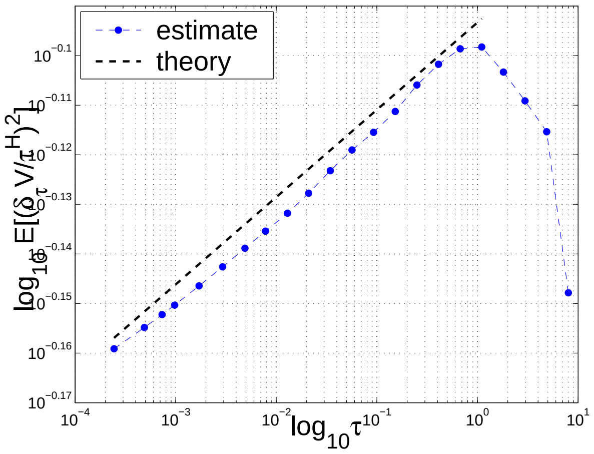
bruit (densité)		**mouvement** (mesure)		**marche aléatoire**
	$\overset{\int Q_r}{\Longrightarrow}$		$\overset{B_H(A)}{\Longrightarrow}$	
$\mathbb{E}[Q_r{}^q]$		$\mathbb{E}\delta_\tau A^q$		$\mathbb{E}\lvert\delta_\tau V_H\rvert^q$
$=$		$\aleph$		$\aleph$
$\exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_r)]$		$\tau^q \exp\left[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)\right]$		$\tau^{qH} \exp\left[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)\right]$

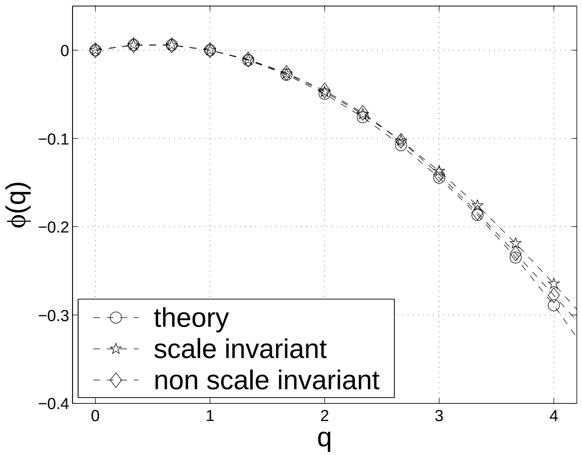
- temps continu ($t \in \mathbb{R}^+$), accroissements stationnaires, invariance d'échelle continue, $\forall\varphi(q)$ d'une distribution Inf. Div.,
- procédures MATLAB

Invariance d'échelle et lois de puissance

$\mathbb{E}[(\delta_\tau A/\tau)^2]$ $\mathbb{E}[(\delta_\tau V/\tau^H)^2]$ $\varphi(q)$







$\varphi(2)\log\tau$ $\varphi(2H)\log\tau$

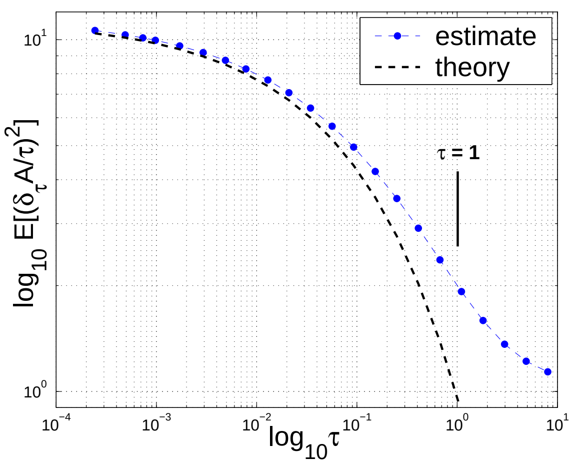
comportements **linéaires** dans diagrammes log-log

$\Downarrow$

LOIS DE PUISSANCE

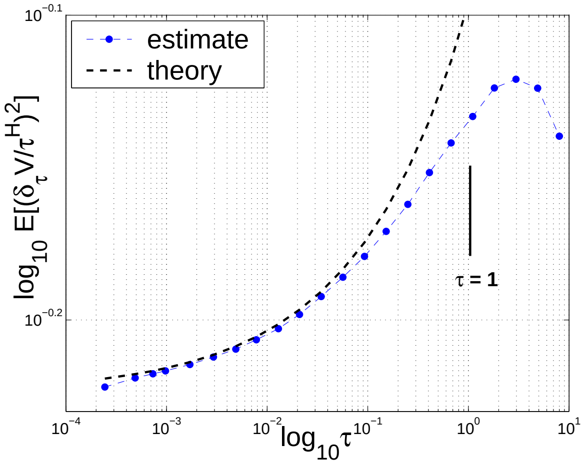
Au-delà des lois de puissance...

$\mathbb{E}[(\delta_\tau A/\tau)^2]$



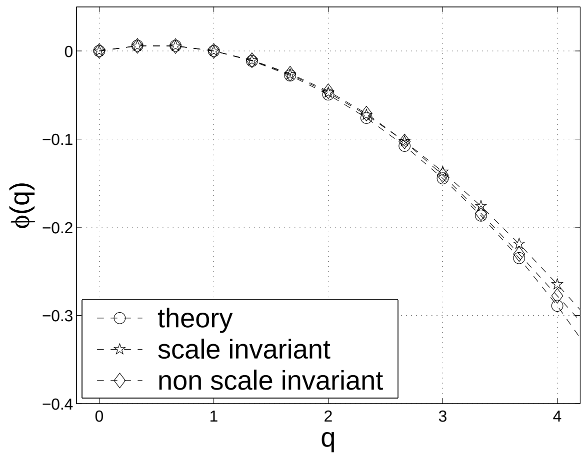
$-\varphi(2)m(\mathcal{C}_\tau)$

$\mathbb{E}[(\delta_\tau V/\tau^H)^2]$



$-\varphi(2H)m(\mathcal{C}_\tau)$

$\varphi(q)$



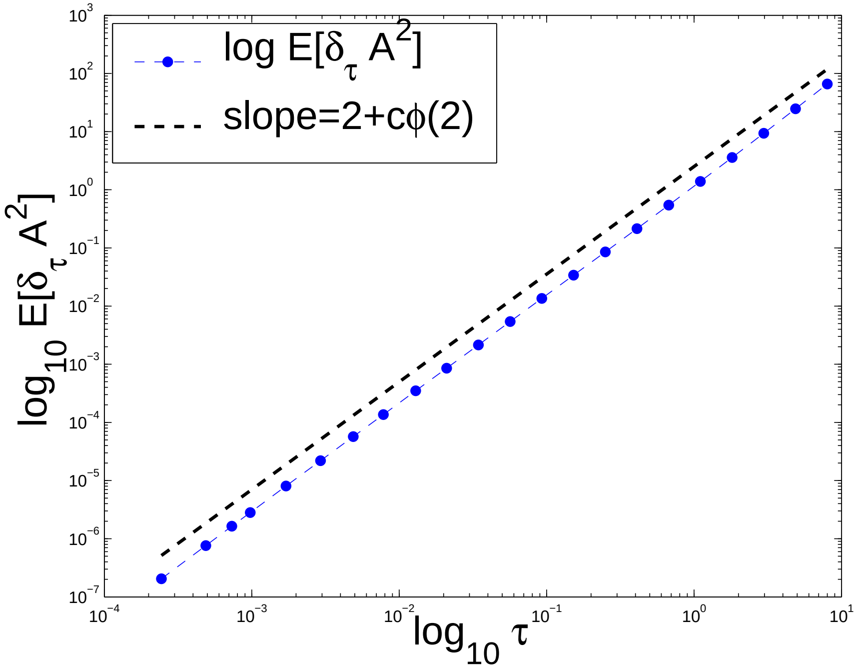
comportements **non-linéaires** dans diagrammes log-log

$\Downarrow$

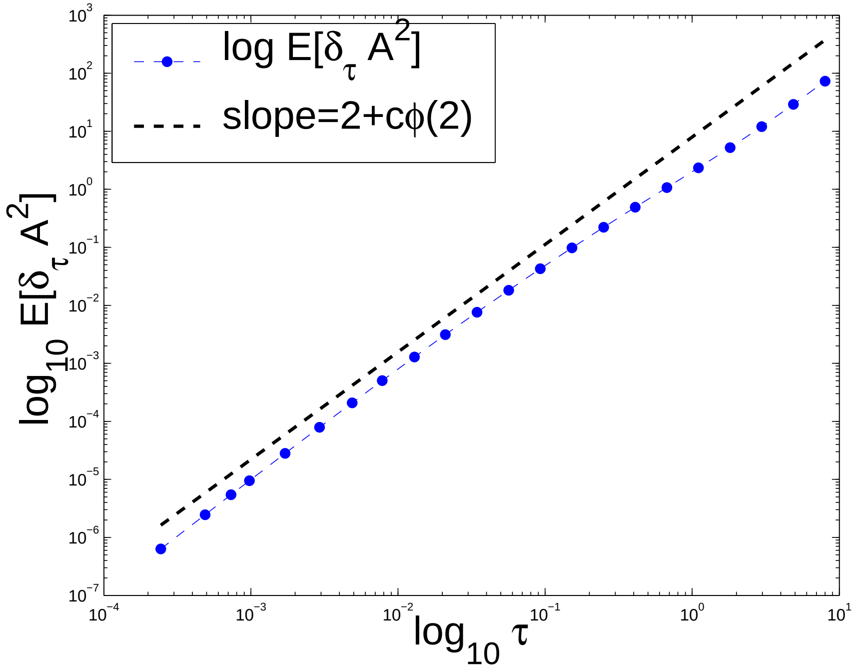
~~LOIS DE PUISSANCE~~ $\boxed{\text{cascade voilée}}$

$\mathbf{E}\delta_\tau A^2$ multifractale / voilée

MULTIFRACTALE



VOILÉE



Exemple simple

$$\boldsymbol{dm(t,r) = \frac{dt\,dr}{r^{2+\beta}}}$$

alors

$$\boldsymbol{m(\mathcal{C}_\tau)} \underset{\tau\to 0}{\sim} \begin{cases} \tau^{-\beta} \text{ si } \beta > 0, \\ -\ln\tau \text{ si } \beta = 0, \\ \boldsymbol{\dfrac{1-\tau^{-\beta}}{\beta}} \to \boldsymbol{Cte} \text{ si } \boldsymbol{\beta < 0} \,. \end{cases}$$

▼ **Analyse Multifractale** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\lim_{\tau\to 0}}$

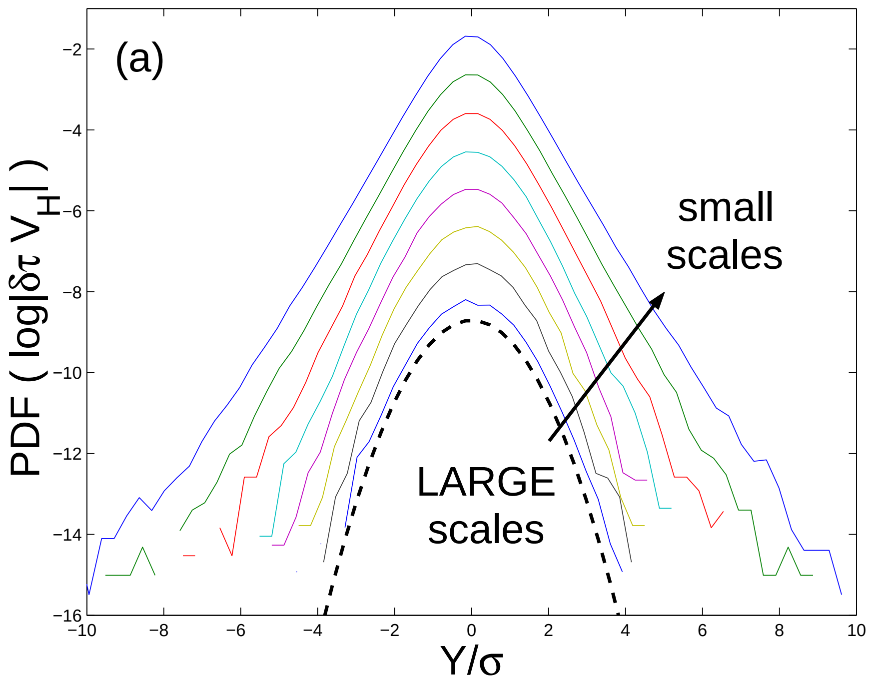
donc le cas $\boldsymbol{\alpha > 1}$ est sans intérêt en terme d'analyse multifractale $(\sim \tau^q)$.

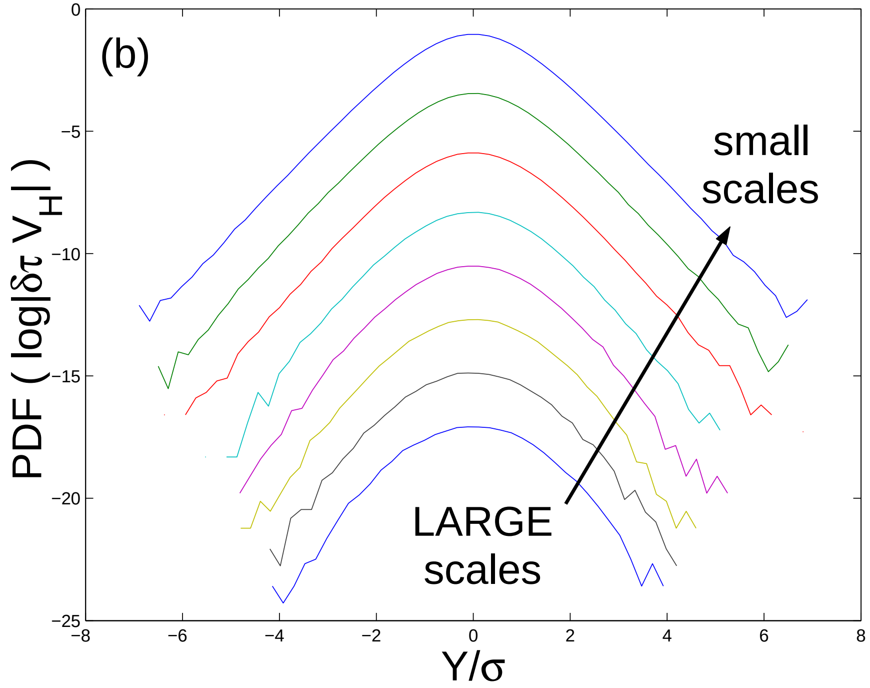
▲ **Analyse LID** $\Longrightarrow$ $\cancel{\boldsymbol{\lim_{\tau\to 0}}}$

intérêt = **évolution à travers les échelles**

Evolution des densités de probabilité

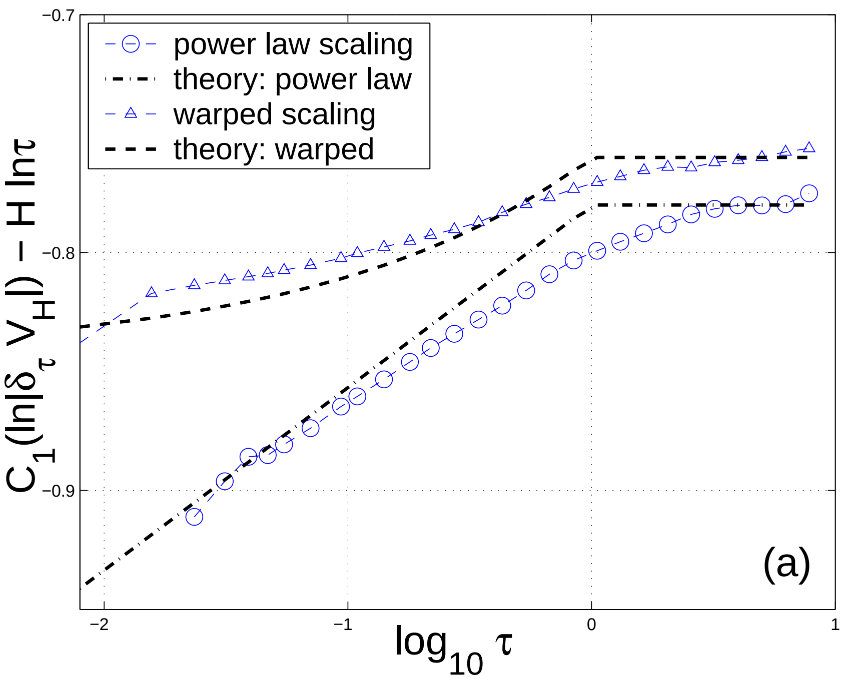
MULTIFRACTALE $\neq$ **VOILÉE** $(\beta = -0.4)$

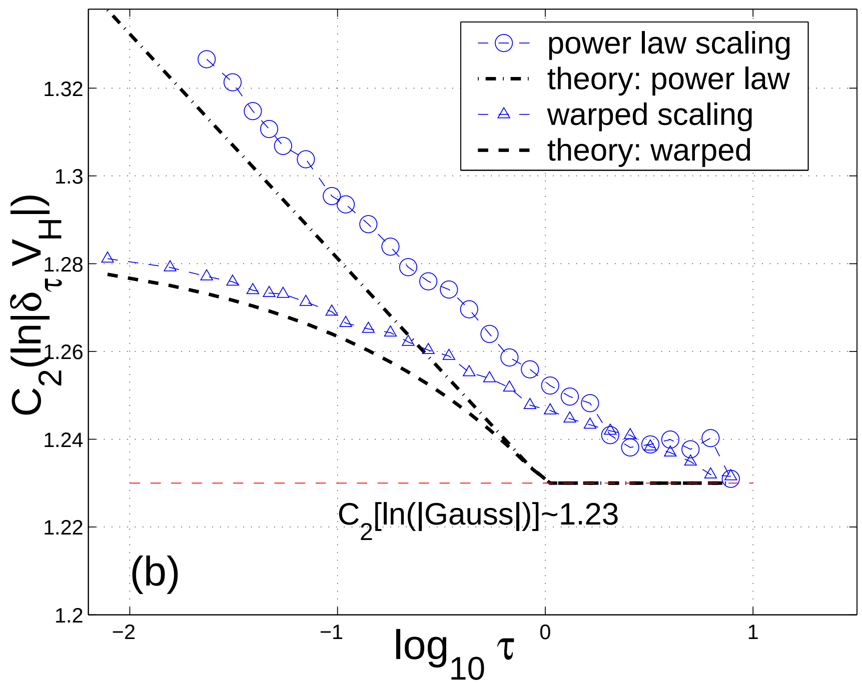




de gaussien vers *non gaussien* vers petites échelles
(ex : kurtosis...)

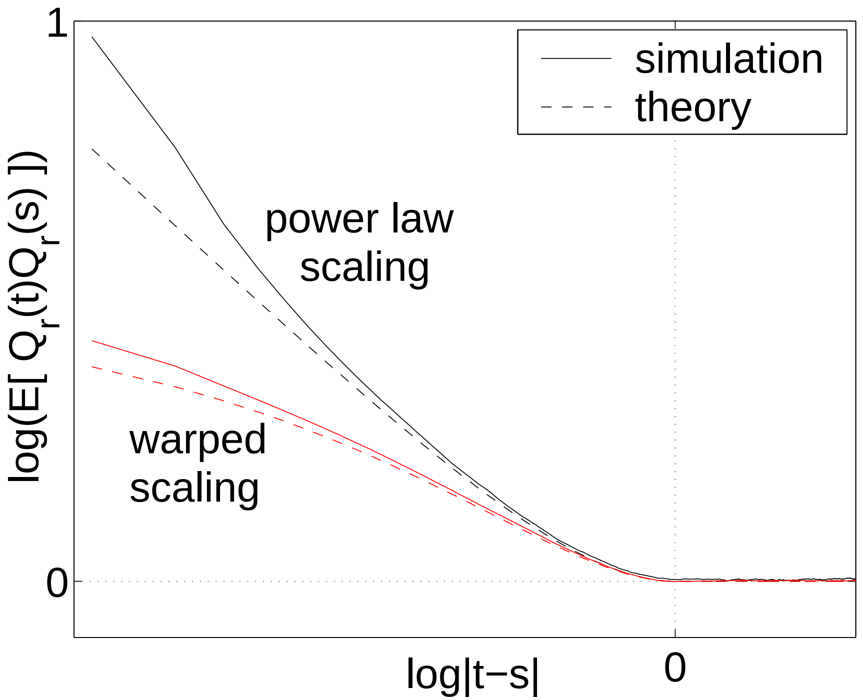
Cumulants du log des accroissements de V_H

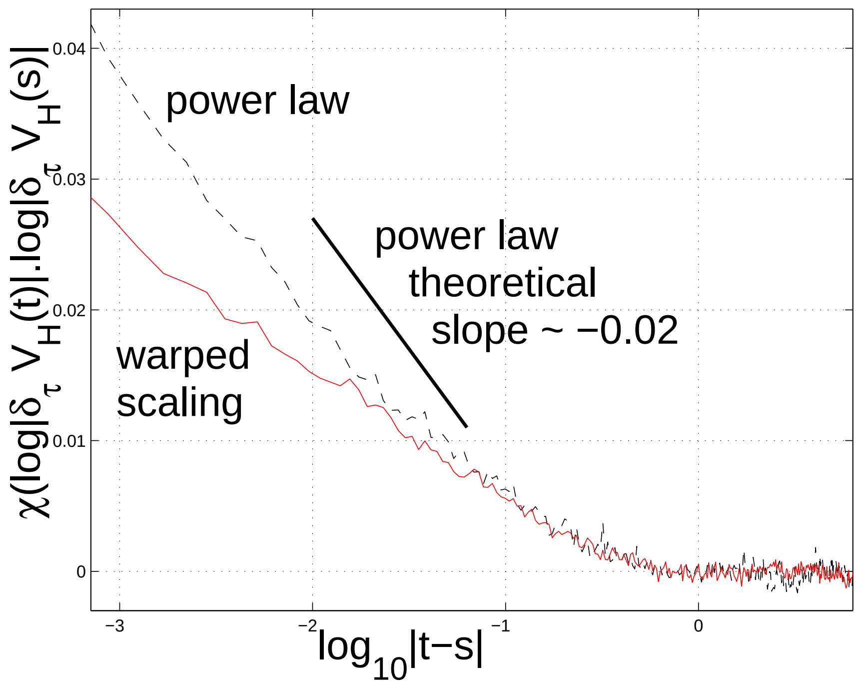




(a)$C_1 - H\ln\tau \simeq -H\varphi'(0)m(\mathcal{C}_\tau)$ (b) $C_2 \simeq -H^2\varphi''(0)m(\mathcal{C}_\tau)$

Fonctions d'autocorrélation "voilées"





$\mathbb{E}[Q_r(t)Q_r(s)]$ Autocorrélation de $\ln|\delta_\tau V_H|$

Bilan provisoire

✔ **modèles Log-Inf. Div. simulables,**

✔ cascades voilées : *premier écart contrôlé aux lois de puissance,*

✔ **déception :** l'effet existe mais reste faible,

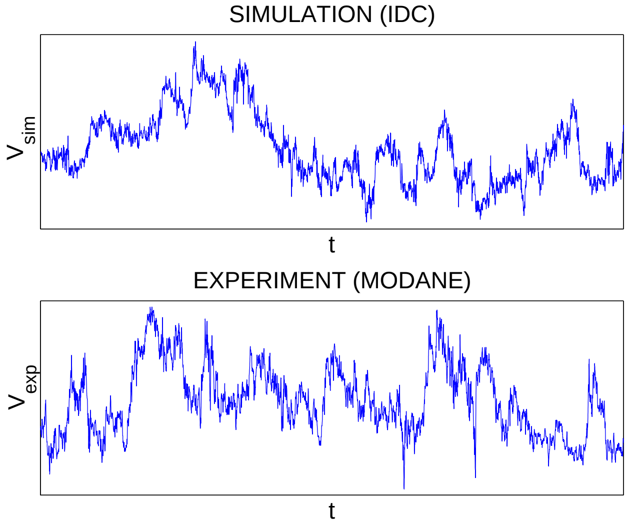
✔ **applications :** turbulence, trafic internet, finance...

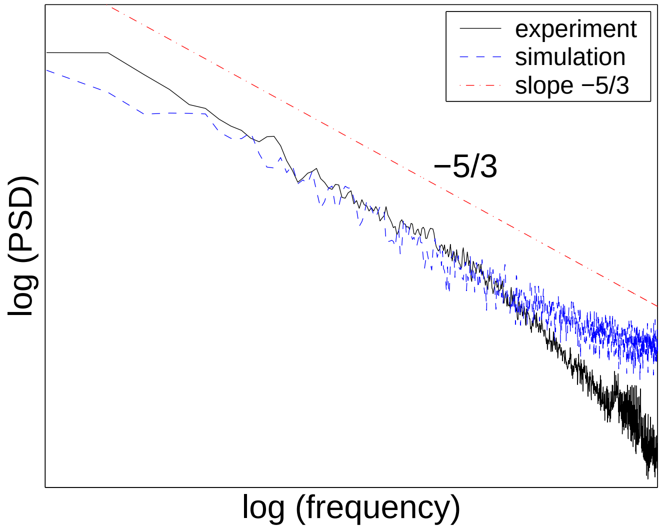
Et après ?

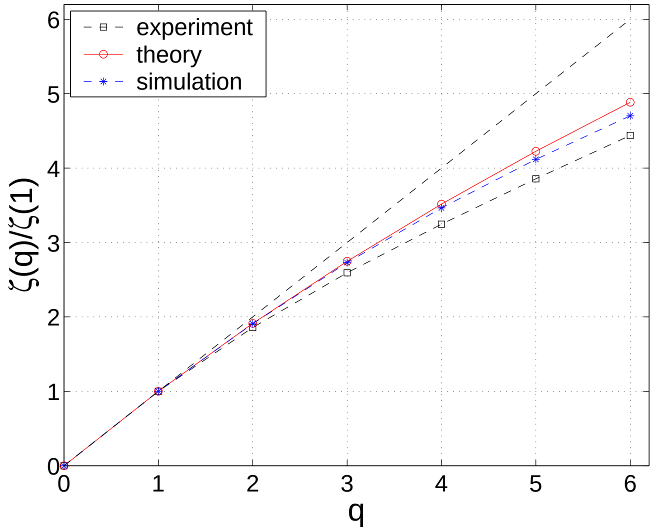
- ✔ **encore plus loin des lois de puissance, c'est possible ?. . .**
- ✔ **d'autres pistes que les CLID ?** (pb de l'intégration. . .)
- ✔ **skewness** ?
- ✔ **analyse :** estimation, prédiction. . .
- ✔ **CLID multidimensionnelles**
- ✔ **banque d'algorithmes de synthèse.**

CLID *vs* modèle She-Lévêque et signal "Modane"

$\equiv$ marche aléatoire Log-Inf. Div. V_H *versus* vitesse v







V_H *versus* Modane — Spectres — Exposants $\zeta(q)$

$\Longrightarrow$ signal artificiel respectant le modèle de She-Lévêque

Une équation stochastique dans le cas Log Normal

Notation : $Q_r \equiv \varepsilon_\lambda$ avec $\lambda = \frac{1}{r} \gg 1$

$$\varepsilon_\lambda(t) = \lambda^{-\mu/2} \exp\left(\mu^{1/2} \int_{t+1-\lambda}^{t} (t+1-u)^{-1/2}\, dB(u) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} d\varepsilon_\lambda(t) &= \sqrt{\mu}\, \varepsilon_\lambda(t) \left(dB(t) + \frac{1}{2}(1 - W(t))dt \right) \\ W(t) &= \sqrt{\mu} \int_{t+1-\lambda}^{t} (t+1-u)^{-3/2} dB(u) \end{cases}$$

[F.G. Schmitt, Eur. Phys. J. B, 2003]

Semi-groupes et cascades log-infiniment divisibles

$$\mathcal{G}P(Y) \; = \int_{-\infty}^{+\infty} P(Y-u)\, G(u)\, du = G \star P\,(Y) \qquad P_{a_2}(Y) = G_{\Delta n} \star P_{a_1}(Y)$$

semi-groupes

$$\mathcal{G}(s_1 + s_2) = \mathcal{G}(s_1)\, \mathcal{G}(s_2)$$

semi-groupe continu : générateur $\mathcal{U}$

$$\frac{\mathcal{G}(h) - \mathbb{1}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \mathcal{U}$$

$$\mathcal{G}(s) = \exp\left(s\mathcal{U}\right)$$

$$\Downarrow$$

- $P_s = \mathcal{G}(s) P_0 \Longrightarrow \dfrac{\partial P_s}{\partial s} = \mathcal{U} P_s$
- lien avec semi-groupes de Markov ?

cascades log-inf. div.

$$G_{s_1+s_2} = G_{s_1} \star G_{s_2}$$

fonction génératrice : générateur H

$$\tilde{G}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{qy}\, G(y)\, dy = e^{-H(q)}$$

$$\tilde{G}_s = \exp\left(-sH\right)$$

- G_s = *propagateur* d'une CLID
- **Définition :** G est le *noyau*