THESE DE DOCTORAT

Numéro d'ordre : 205 N^o bibliothèque : 01ENSL0205

préparée au

Laboratoire de Physique

de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Cascades log-infiniment divisibles et analyse multirésolution. Application à l'étude des intermittences en turbulence.

soutenue publiquement le 30 novembre 2001 par

Pierre CHAINAIS

pour obtenir le grade de **Docteur de l'ENS Lyon**

Spécialité : **Physique**

JURY

Patrice ABRY	Directeur
Anestis ANTONIADIS	Rapporteur
Richard BARANIUK	
Albert BENASSI	Président
Bernard CASTAING	
Yves GAGNE	Rapporteur

Remerciements

En premier lieu, je veux exprimer ici ce que je dois à Patrice Abry qui a encadré mes travaux pendant ces trois années. Il a su m'accompagner avec clairvoyance, rigueur et beaucoup de générosité dans le temps qu'il m'a consacré. Patrice Abry m'a donné en exemple un esprit à la fois critique et ouvert.

Je tiens à remercier très sincèrement Anestis Antoniadis et Yves Gagne d'avoir accepté la lourde charge de rapporter sur ce manuscrit. Je suis sensible à l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et leur sais gré de participer à ce jury.

Je veux aussi remercier Richard Baraniuk et Albert Benassi qui me font l'honneur de juger ce travail.

Bernard Castaing me fait l'amitié de faire partie de ce jury. Au-delà de tout ce que je lui dois scientifiquement, je lui exprime ici toute ma gratitude pour les nombreuses discussions que nous avons eues durant cette thèse. Son arrivée au laboratoire m'a permis de mesurer son enthousiasme, sa qualité d'écoute et sa rigueur intellectuelle.

L'équipe *SISYPHE* est un cocon scientifique extraordinaire. J'ai pu apprécier ce que ce groupe doit à son responsable Patrick Flandrin, aussi bien humainement que scientifiquement. Se sentir soutenu et entouré est un élément important pour mener à bien un travail de thèse. Tous les membres de l'équipe assurent naturellement cette ambiance sereine au quotidien. Un grand merci à Patrick, Patrice, Bernard, Pierre, Stéphane, Eric (Falcon), Claude, Olivier, Christophe, Eric (Chassande-Mottin) et Anne-Emmanuelle.

Jean-François Pinton a encadré toute la partie expérimentale de ce travail avec enthousiasme et gentillesse. Il m'a aidé à comprendre ce que le mot "expérimentateur" signifie vraiment. Son implication régulière dans l'avancée de mes recherches a joué un rôle essentiel. Pour (au moins) toutes ces raisons, je lui exprime toute ma gratitude. De manière plus large, cette thèse doit beaucoup à nos échanges constants avec les membres de l'équipe Hydrodynamique, Turbulence et Phénomènes Non-Linéaires. Merci à eux.

Aucune mesure, aucune donnée, n'aurait vu le jour sans la compétence et la disponibilité inestimables des techniciens du laboratoire. Franck, Djamel, et Marc m'ont plus d'une fois sauver la mise. Ce sont des remerciements particulièrement chaleureux que je veux leur adresser ici.

Les directeurs successifs du laboratoire de Physique ont toujours entretenu un respect des "non-permanents" (thésards et autres...) dont je leur sais gré. Je remercie Sergio Ciliberto et ses prédécesseurs de m'avoir accueilli dans un lieu où la recherche est si bouillonnante.

Les collaborations passées ou en cours avec Emmanuel Lévêque, Alfred Hero, Darryl Veitch et Rolf Riedi ont toujours bousculé mes certitudes avec bonheur. Qu'ils en soient remerciés.

Un petit mot à part pour un grand merci à tous les thésards du laboratoire, et plus particulièrement à Catherine, Nicolas, Bruno, Pierre, Ludovic, Frédéric, Rémi, Baptiste...

La beauté de la science n'est pas tout, les soucis administratifs nous jouent parfois des tours. L'efficacité de Marie-Pierre, Anne, Laurence, Jean-Alex, Marie-Jeanne, Delphine et Valerie n'a d'égale que leur gentillesse. C'est avec plaisir que je leur exprime toute ma gratitude pour la gestion de ces soucis "annexes", bien souvent essentiels.

Un pied en Auvergne, un pied à Lyon... Mes hôtes lyonnais m'ont toujours offert bien plus que le gîte et le couvert. Plein de mercis en pagaille à Manu et Sarah, Claire et Christophe, Vincent, Matthieu et Sonia, Sylvie et Stéphane, Isabelle, Christelle et Patrick, Catherine et Alain, Matthieu et Helene, Nicolas et Pascale...

Enfin, trois personnes ont vu ces trois années sous un angle un peu particulier, souvent à distance sur la fin. Quelques mots me paraîtront toujours dérisoires pour dire merci à Claire, Titouan et Anouk.

Table des matières

Introduction

Introduction

Les motivations de ce travail sont multiples. Nous nous situons volontairement à l'interface entre différentes communautés avec la volonté de nous enrichir de leurs interactions. Statistique, traitement du signal, turbulence expérimentale, modélisation théorique, physique statistique... chaque domaine impose à l'"étranger" ses règles explicites ou non, ses a priori, sa culture, ses techniques, son langage. Sans chercher à appartenir à toutes les communautés, au risque de devenir apatride, accepter l'échange ouvre des horizons fascinants. Un raisonnement physique peut aider à comprendre un signal, une étude statistique peut renseigner le physicien. Les barrières d'énergie sont parfois hautes, mais les franchir est une source intarissable de satisfaction intellectuelle. C'est dans cet état d'esprit que nous avons travaillé, en associant ostensiblement un travail de synthèse et de compréhension théorique, un investissement expérimental, et le développement de méthodes statistiques originales de traitement des données.

Cette thèse constitue en quelque sorte un prolongement très ramifié du stage de DEA [45] effectué au laboratoire en 1997. Il s'agissait alors de développer une méthode ondelette pour "effacer" la trace du passage de structures cohérentes (filaments) dans un signal de vitesse turbulent issu d'un anémomètre à fil chaud[1]. Nous avions obtenu des résultats tout à fait intéressants indiquant que l'influence des structures de basse pression sur la statistique de la vitesse était certainement limitée. Nous ne pouvions cependant accorder une trop grande confiance à ces conclusions car nous craignions de trop voir dans ces résultats la trace des défauts de notre méthode d'"effacement" des filaments, sans pouvoir quantifier l'importance de cet artefact inévitable. Les exposés d'alors évoquaient souvent les exposants des fonctions de structure sans toujours leur donner systématiquement un sens très précis. Les cascades log-infiniment divisibles proposées par B. Castaing [42, 43] peinaient à occuper la place qu'elles méritent tandis que l'E.S.S. (*Extended Self Similarity*), pourtant équivalente, occupait le devant de la scène. Les structures cohérentes avaient été observées numériquement [83, 156, 151, 173] et expérimentalement [34, 62, 172] quelques années auparavant. Olivier Cadot (*Etude des structures de basse pression dans la turbulence développée*) et Stéphane Roux (*Analyse en ondelettes de l'auto-similarité de signaux en turbulence pleinement développée*) venaient de soutenir leur thèse.

Le laboratoire de Physique de l'ENS Lyon semble alors être le lieu idéal pour aborder

[1] Un anémomètre à fil chaud mesure la vitesse d'un fluide s'écoulant autour d'un fil mince maintenu à température constante (par ex. 250^oC) par l'application d'une tension à ses bornes. Une boucle de rétroaction commande cette tension : plus la vitesse du fluide est grande plus le fil est refroidi, et plus la tension nécessaire à son maintient en température est grande. Une étalonnage expérimental permet de relier la tension appliquée à la vitesse du fluide (voir annexe C).

ou approfondir à la fois des questions de turbulence, touchant par exemple aux propriétés du champ de vitesse, et des questions de traitement du signal ou de statistique, motivées par l'élaboration d'outils d'estimation performants et une meilleure compréhension des cascades log-infiniment divisibles. Les compétences de l'équipe SISYPHE (SIgnaux, SYstèmes et PHysiquE) et une étroite collaboration avec l'équipe Physique Non-Linéaire, Hydrodynamique et Turbulence ont créé les conditions idéales dans lesquelles a pu avoir lieu ce travail intitulé *Cascades log-infiniment divisibles et analyse multirésolution. Application à l'étude des intermittences en turbulence.*

On étudie très souvent la statistique d'un champ de vitesse turbulent à partir du comportement de ses accroissements mesurés sur différentes distances. On parle en général de "l'intermittence" en évoquant implicitement le comportement "anormal" (ne respectant pas les raisonnements dimensionnels simples) des moments des accroissements du champ de vitesse en fonction de la distance, l'échelle, sur laquelle ils sont mesurés. Les spécialistes de turbulence parlent "d'écart à K41". Cette observation se traduit par une déformation des distributions des accroissements de vitesse, pratiquement gaussiennes aux grandes échelles, fortement non gaussiennes aux petites. Les événements extrêmes sont relativement plus fréquents aux petites échelles : nous parlerons aussi "d'écart à l'auto-similarité". Cette "anomalie" varie d'un écoulement à l'autre, ce qui peut provenir du changement de comportement des grandes échelles (forçage, géométrie), d'effets de Reynolds fini... Parallèlement à cette intermittence statistique, un peu abstraite, on évoque aussi l'intermittence spatio-temporelle. Elle correspond à l'apparition/disparition apparemment aléatoires de structures de géométrie particulière dans les écoulements turbulents : les structures cohérentes. Le chapitre **I** revient sur les notions d'intermittences statistique et spatio-temporelle en précisant leurs définitions, et propose une brève introduction historique des cascades log-infiniment divisibles dans le contexte de la turbulence.

Les cascades log-infiniment divisibles fournissent un outil de modélisation extrêmement puissant et malléable, permettant de dépasser la propriété d'invariance d'échelle stricte. L'invariance d'échelle résulte de l'absence de toute échelle caractéristique dans le système étudié. Le comportement des moments des coefficients d'ondelette en lois de puissance de l'échelle, ce qui correspond à un spectre en $1/f$, en est une manifestation caractéristique : on parle de lois d'échelle. Un écart à l'invariance d'échelle constitue l'une des composantes du phénomène d'intermittence statistique en turbulence. L'analyse multirésolution (associée à une transformée en ondelette discrète) donne une représentation temps-échelle d'un signal. Les transformées en ondelettes faisant partie du quotidien de l'équipe SISYPHE, nous devions les marier aux cascades log-infiniment divisibles, pour le meilleur bien sûr. Le chapitre **II** propose une présentation des cascades log-infiniment divisibles sur les coefficients d'ondelette dans le contexte des statistiques et du traitement du signal. Nous verrons en quel sens les cascades log-infiniment divisibles généralisent la notion d'invariance d'échelle (auto-similarité, formalisme multifractal...) en la plongeant dans un cadre formel plus souple, donc plus adaptable à des situations réelles.

Le décor planté, il devient indispensable d'affiner notre compréhension des cascades log-infiniment divisibles, que ce soit du point de vue "turbulence" ou du point de vue "statistique et traitement du signal". Le chapitre **III** a pour objectif de situer les cascades log-infiniment divisibles dans un univers où elles ne sont pas isolées. Nous les présentons en leur associant une structure de semi-groupe commune à d'autres formalismes. Sous certaines conditions, nous mettons en évidence une correspondance forte entre cascades log-infiniment divisibles et approches markoviennes (équation de Fokker-Planck, équation de Langevin). L'association souvent implicite entre cascades log-infiniment divisibles et cascades multiplicatives présente quelques difficultés. Nous étudions la question du lien entre les multiplicateurs (*breakdown coefficients*) tels qu'ils sont traditionnellement définis en turbulence et les cascades log-infiniment divisibles. Enfin nous proposons une nouvelle interprétation des cascades log-infiniment divisibles pour aboutir à une vision originale du phénomène d'intermittence statistique en turbulence grâce à une analogie très parlante. En particulier, nous insistons sur l'intérêt à la fois théorique, pratique et intuitif des modèles log Poisson composés.

Rester enfermé dans un formalisme, aussi joli soit-il, ne mènerait à rien sans une passerelle vers la réalité. Les deux premières parties du chapitre **IV** sont consacrées à l'étude des estimateurs indispensables à l'identification des exposants de lois d'échelle et des quantités caractéristiques d'une cascade log-infiniment divisible. Chaque fois que c'est possible, nous avons le souci d'accompagner les estimations d'un intervalle de confiance. Disposer d'intervalles de confiance sur des estimations est un préalable à toute comparaison [49], exercice auquel nous nous livrons à partir de différentes transformées en ondelette (continue, discrète, MMTO). Nous appliquons ces méthodes à des données de télétrafic informatique [168]. Dans ce cas, une série de facteurs à la fois techniques et humains confèrent sa complexité au signal observé. La dernière partie de ce chapitre [47] montre les résultats "surprenants" obtenus lorsqu'on applique à un processus linéaire fractionnaire stable une procédure habituelle d'estimation du spectre multifractal à partir des lois d'échelle. Nous mettons en évidence la propriété à l'origine de ce comportement particulier.

Le chapitre **V** [46] met en œuvre les résultats du travail de fond des chapitres précédents dans le but de caractériser l'influence de structures cohérentes (structures de basse pression) sur l'intermittence statistique d'un signal de vitesse turbulent : quel est le lien entre lois d'échelle et structures ? entre intermittence statistique et intermittence spatio-temporelle ? Le lien entre l'équation de Navier-Stokes, décrivant théoriquement la dynamique d'un écoulement (turbulent ou non), et les propriétés statistiques de cet écoulement reste difficile à établir. Si certains objets (tourbillons, nappes...) possèdent des propriétés dynamiques particulières, leur influence statistique demeure obscure. Pour tenter d'éclaircir cette question, nous avons installé un dispositif expérimental permettant des mesures conjointes en espace et en temps des champs de pression et de vitesse. La géométrie de l'écoulement est une géométrie de von Kármán (plus communément appelée *machine à laver*). De fortes dépressions associées à l'existence de tourbillons filamentaires sont détectées. Une analyse de la statistique des coefficients d'ondelette du signal de vitesse conditionnée à ces événements nous permet de décrire l'influence statistique de ces structures cohérentes. Afin de vérifier la reproductibilité de ces résultats, et surtout pour étudier leur sensibilité à une variation du nombre de Reynolds, nous avons installé un deuxième dispositif expérimental, similaire au précédent, mais autorisant l'utilisation de gaz autres que l'air. En utilisant des gaz de densités différentes, donc de viscosités cinématiques différentes, on accède à des nombres de Reynolds R_λ basé sur l'échelle de Taylor variant de 100 à 800 environ.

Les annexes **A** et **B** rendent compte de résultats partiels obtenus parallèlement à la direction principale développée dans ce mémoire. Dans l'annexe **A**, nous nous intéressons aux distributions des multiplicateurs (*breakdown coefficients*) pour la dissipation moyennée localement [48]. Nous proposons un modèle paramétrique simple de ces distributions et étudions l'évolution des paramètres associés à travers les échelles. De manière étonnante, les paramètres semblent obéir à des lois de puissance dans toute la gamme d'échelles disponible, tandis que les moments des multiplicateurs s'en écartent. L'annexe **B** est consacrée à l'étude des maxima de la version 1D de la dissipation construite à partir d'un signal de vitesse fil chaud (carré de la dérivée de la vitesse). Nous mettons en évidence un artefact statistique que nous décrivons et expliquons analytiquement.

Les annexes **C**, **D** et **E** concernent certains aspects techniques liées aux différentes expériences effectuées : étalonnage d'un fil chaud pour différents gaz (C), refroidissement de la machine à laver (D), et fiches de sécurité des différents gaz utilisés (E).

S'ils ne peuvent évidemment pas apparaître explicitement dans ce mémoire, les nombreux codes **MATLAB** élaborés durant ces trois années font partie intégrante de la thèse et sont tenus à disposition. Ces codes mettent en œuvre les méthodes d'estimation décrites dans ce mémoire. La plupart d'entre eux se trouvent en ligne aux adresses suivantes :

- http ://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/Signal/pab.html
- http ://www.emulab.ee.mu.oz.au/~darryl/secondorder_code.html
- http ://www.emulab.ee.mu.oz.au/~darryl/MS_code.html

Enfin, ce travail de thèse est le fruit de collaborations que nous tenons à expliciter. Mon premier "collaborateur" est bien sûr Patrice Abry. Certains aspects de ce travail de thèse sont évoqués dans une perspective plus générale et sous un angle différent dans son mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches [2] intitulé *Lois d'échelle, multirésolutions et ondelettes. Applications au télétrafic informatique et à la turbulence développée.* L'ensemble du chapitre **IV** doit beaucoup à Darryl Veitch (EMUlab Melbourne, Australie). Stéphane Roux (SISYPHE, ENS Lyon) est particulièrement impliqué dans la partie **IV**.2.4 et la partie **IV**.2.5. L'ensemble du chapitre **V** est le résultat d'un travail expérimental suivi par Jean-François Pinton (Physique non-linéaire, Hydrodynamique et Turbulence, ENS Lyon). L'annexe **A** est issue d'un travail avec Emmanuel Lévêque (Physique non-linéaire, hydrodynamique et turbulence, ENS Lyon) et Christophe Baudet (LEGI, Grenoble). L'annexe **B** est née d'une collaboration, entâmée avec Emmanuel Lévêque en bavardant au fond de la salle pendant un séminaire (sans doute passionnant. . .), et enrichie par la contribution essentielle d'Alfred Hero (University of Michigan, Ann Arbor, USA). Mentionnons enfin notre travail en cours avec Rudolf Riedi (Rice University, Houston, USA) ; même si nos résultats, encore préliminaires, n'apparaissent pas ici, cette collaboration a influencé très nettement notre vision des choses au moment de la rédaction.

Chapitre I
Intermittences en turbulence

I. Intermittences en turbulence

Le but de ce chapitre est de proposer une introduction historique à la turbulence et aux phénomènes d'intermittences statistique et spatio-temporelle. Nous espérons ainsi éclairer le lecteur sur la perspective dans laquelle se situe ce travail. Parmi les lectures qui ont guidé ces réflexions, outre les grands classiques, il faut particulièrement citer l'excellent article de revue de K. Sreenivasan [158] paru en 1999, le très exhaustif article de revue de Nelkin [121] paru en 1994 et l'ouvrage de Frisch [76] paru en 1995, ainsi bien sûr que quelques articles "historiques" qui ont marqué, à nos yeux, une étape dans l'étude des aspects de la turbulence sur lesquels nous avons concentré nos efforts [42, 43, 77, 91, 92, 103, 123, 124, 125, 138, 139, 175] pour n'en citer qu'une petite sélection forcément incomplète... Cette présentation est volontairement partiale et constitue plus une introduction à l'approche que nous avons choisie qu'une présentation générale de l'ensemble des très nombreux travaux liés à l'intermittence pour laquelle nous renvoyons le lecteur aux ouvrages et articles de référence.

1 Qu'est-ce qu'un écoulement turbulent ?

1.1 Impressions

La turbulence est vieille. Il semble que les premières descriptions un peu détaillées soient dues à Léonard de Vinci, au début du XVI^{ème} siècle. Les premiers travaux scientifiques modernes datent de Osborne Reynolds. Le III^{ème} millénaire débute face à un océan de questions... La turbulence est vieille, mais garde de beaux jours devant elle ! D'autant plus qu'elle est omniprésente. Ingénieurs motoristes, thermiciens, météorologues, climatologues, océanographes, astronomes, architectes, concepteurs automobiles, avioneurs ou sous-mariniers... tous doivent composer bon gré mal gré avec la turbulence. Ou devrait-on dire *les turbulences* ? Il n'est même pas sûr que la turbulence soit un domaine d'étude connexe...

Pourtant, chacun se fait aisément une image plus ou moins juste de la turbulence à partir d'observations quotidiennes. Les prémices de la turbulence sont déjà présents dans les volutes d'une fumée de cigarette, dans le café que l'on remue. Une halte sur les quais du Rhône s'avère instructive. A la surface du fleuve, derrière un pont, le promeneur se laisse surprendre par l'apparition d'un splendide tourbillon qu'il suit du regard quelques secondes avant que des remous moins esthétiques ne le remplacent. Ce qui frappe l'œil, c'est cette succession/coexistence de remous et de structures géométriques étirées, enroulées, déformées que l'on peut suivre un moment avant qu'elles ne se regroupent ou explosent de

	U [m.s^{-1}]	L [m]	ν [m.s^{-2}]	Re
manteau terrestre	10^{-5}	10^{5}	10^{20}	10^{-20}
bactérie dans l'eau	10^{-5}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}
fumée de cigarette	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	10^{2}
batteur à œufs	10^{0}	10^{-2}	10^{-6}	10^{4}
nageur dans l'eau	10^{0}	10^{0}	10^{-6}	10^{6}
écoulement atmosphérique	10^{1}	$10^{2 \text{ à } 4}$	10^{-5}	$10^{8 \text{ à } 10}$

Tab. I.1: Quelques ordres de grandeur de nombre de Reynolds rencontrés couramment.

manière imprévisible. La turbulence s'apparente à un mélange d'ordre et de désordre, de durable et d'imprévisible.

1.2 Equation de Navier-Stokes, nombres de Reynolds

Le problème semble pourtant mathématiquement clairement posé, en des termes apparemment simples et concis. L'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} \;=\; -\frac{1}{\rho}\nabla p \,+\, \nu\Delta\mathbf{v} \tag{I.1}$$

accompagnée des conditions aux limites et de la condition d'incompressibilité

$$\nabla.\mathbf{v} \;=\; 0 \tag{I.2}$$

décrit la mécanique des fluides de manière *déterministe*. Le comportement d'une solution est essentiellement (mais bien sûr insuffisamment) décrit par un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds :

$$Re \;=\; \frac{U\,L}{\nu} \tag{I.3}$$

où U est un ordre de grandeur des variations de vitesse, L une taille caractéristique de l'écoulement, et ν la viscosité cinématique du fluide. Il est aussi devenu plus courant d'utiliser le nombre de Reynolds construit sur l'échelle de Taylor noté R_λ, plus précisément mesurable et comparable d'une expérience à l'autre. Le nombre sans dimension R_λ est défini par :

$$R_\lambda \;=\; \frac{v_{rms}\,\lambda}{\nu} \tag{I.4}$$

où v_{rms} est la valeur quadratique moyenne d'une composante de la vitesse, l'échelle de Taylor λ est définie par

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mathbb{E}[\,(\partial v/\partial x)^2\,]}{v_{rms}^2} \tag{I.5}$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance mathématique[1] (la moyenne statistique). Lorsque Re est suffisamment grand, on a

$$R_\lambda \sim Re^{1/2} \tag{I.6}$$

La complexité de l'écoulement augmente lorsque le nombre de Reynolds croît, c'est-à-dire lorsque le terme non-linéaire $(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}$ de (I.1) est d'importance croissante relativement au terme de dissipation visqueuse $\nu\Delta\mathbf{v}$. Tant que le nombre de Reynolds reste suffisamment faible, l'écoulement conserve une structure simple, organisée, stable : il est dit *laminaire*. Lorsque le nombre de Reynolds augmente et dépasse des valeurs de l'ordre de 10 ou 100 selon les cas, on observe une succession d'instabilités de plus en plus nombreuses jusqu'à l'apparition relativement brutale d'un chaos spatio-temporel autour du nombre de Reynolds critique Re_C. La notion de chaos est associée à la sensibilité extrême aux conditions initiales : une infime fluctuation peut avoir des conséquences gigantesques. Il est impossible de prévoir à long terme l'évolution d'un écoulement turbulent. C'est ce qui limite irrémédiablement les capacités prédictives détaillées de la météorologie à quelques jours.

Une autre difficulté provient du grand nombre de degrés de liberté mis en jeu. Le rapport entre la plus grande échelle L de l'écoulement et l'échelle de dissipation visqueuse η (la plus petite), l'échelle de Kolmogorov, est de l'ordre de

$$\frac{L}{\eta} = \frac{L}{(\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}} \sim Re^{3/4} \tag{I.7}$$

où $\bar{\varepsilon}$ est le taux moyen de dissipation visqueuse par unité de masse :

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\mathbb{E}[\,\frac{1}{2}\,\mathbf{v}^2\,]}_{\textit{énergie cinétique massique moyenne}} \sim \frac{U^3}{L} \tag{I.8}$$

Pour résoudre toutes les échelles dans un cube d'arête L à un instant donné il faudrait donc une grille régulière d'au moins N points avec

$$N \sim Re^{9/4} \tag{I.9}$$

ce qui donne une idée des difficultés techniques que peuvent poser les simulations numériques à haut Reynolds (D.N.S., Direct Numerical Simulation). Dans l'atmosphère, les météorologues sont confrontés à $Re \gtrsim 10^6$ soit $Re^{9/4} \sim 10^{13}$: une simulation résolvant toutes les échelles dans un volume macroscopique est exclue.

En résumé, un écoulement turbulent est d'autant plus imprévisible et désordonné que le nombre de Reynolds Re (ou R_λ) est grand. Il faut dès lors abandonner tout espoir de description détaillée pour tenter une approche statistique ou probabiliste, comme pour la dynamique des gaz.

[1] Lorsqu'on peut associer une densité de probabilité $p(X)$ à la variable aléatoire X, on a l'égalité :

$$\mathbb{E}[X] = \int X\, p(X)\, dX.$$

2 De Reynolds à Kolmogorov 41

2.1 Reynolds

A la fin du XIX^{ème} siècle, Osborne Reynolds [138] est le premier à initier une description statistique de la turbulence, notamment en introduisant la "décomposition de Reynolds" du champ de vitesse en moyenne et fluctuations. Il découvre alors une nouvelle difficulté : le problème de la fermeture. L'écriture d'une équation pour un moment (par exemple la moyenne) implique nécessairement des moments d'ordres supérieurs, de sorte qu'il y a toujours plus d'inconnues que d'équations. On ne pourra pas construire une théorie statistique sans hypothèse(s) supplémentaire(s).

2.2 Richardson

Dans les années 1920, Richardson [139] propose une description phénoménologique de la turbulence sous la forme d'une *cascade* d'énergie des grandes vers les petites échelles. Tandis que l'énergie est injectée aux grandes échelles ($\sim L$), elle est essentiellement dissipée aux échelles visqueuses ($\sim \eta$). Par conséquent, cette énergie doit traverser les échelles depuis L jusque η. En bref, la cascade de Richardson décrit l'écoulement comme une distribution auto-similaire de tourbillons de toutes les tailles comprises entre L et η qui se transmettent l'énergie de proche en proche, pour finalement la dissiper à l'échelle de Kolmogorov. Cette phénoménologie sous-tend pratiquement toutes les approches statistiques élaborées depuis lors, à commencer par la théorie proposé par Kolmogorov en 1941.

2.3 Kolmogorov 41

Cette théorie [91], dont le petit nom est "K41", postule que les petites échelles de la turbulence deviennent statistiquement isotropes dans la limite des nombres de Reynolds infinis, indépendamment du mécanisme de production de la turbulence. Parmi les principaux résultats de K41, il faut noter le résultat exact que constitue la "loi des quatre-cinquièmes" :

Loi des 4/5. En turbulence stationnaire, homogène et isotrope, dans la limite des nombres de Reynolds infinis, pour les échelles $r \ll L$,

$$\mathbb{E}[\,\delta v_r^3\,] = -\frac{4}{5}\bar{\varepsilon}\, r \qquad (Re \to \infty) \tag{I.10}$$

où $\delta v_r(x) = v_x(x+r) - v_x(x)$.$\lhd$

Kolmogorov avait en réalité obtenu la loi des 4/5 à partir de l'équation de von Kármán & Howarth [87, 114] valable à nombre de Reynolds fini :

$$\mathbb{E}[\,\delta v_r^3\,] = -\frac{4}{5}\bar{\varepsilon}\, r + 6\nu\frac{\partial\mathbb{E}[\,\delta v_r^2\,]}{\partial r} \tag{I.11}$$

Plus qu'une seule loi d'échelle (exacte à $Re = \infty$), K41 contient une hypothèse d'autosimilarité d'exposant H=1/3 (voir Ch. **II**). K41 suppose des lois d'échelle à tous les ordres q pour les fonctions de structures (longitudinales) :

$$\mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] \propto (\bar{\varepsilon} r)^{q/3} \qquad (Re \to \infty) \tag{I.12}$$

Pour $q = 2$, on en déduit le fameux spectre en $k^{-5/3}$ si couramment observé (au moins en première approximation). La densité spectrale d'énergie doit vérifier :

$$E(k) \sim \bar{\varepsilon}^{2/3}\, k^{-5/3} \qquad (Re \to \infty) \tag{I.13}$$

dans la zone inertielle, c'est-à-dire pour $1/\eta \gg k \gg 1/L$. K41 est un modèle *auto-similaire* qui suppose que les grandes échelles transfèrent l'énergie par une succession de pas non dissipatifs vers les petites échelles où a lieu la dissipation. La propriété d'auto-similarité doit pouvoir être observée sur les distributions des accroissements δv_r de la vitesse : elles doivent avoir la même forme à toutes les échelles r.

Des mesures expérimentales et numériques de plus en plus fines ont remis le modèle K41 en question. L'étude des exposants $\zeta(q)$ des lois d'échelles pour les fonctions de structure $\mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] \sim r^{\zeta(q)}$ ont montré des écarts à l'auto-similarité :

$$\zeta(q) \neq \frac{q}{3}. \tag{I.14}$$

On a aussi pu observé la déformation des distributions des accroissements δv_r à travers les échelles. Landau avait raison d'argumenter contre l'hypothèse d'auto-similarité... C'est alors que naît la notion d'*intermittence* en turbulence.

3 Le phénomène d'intermittence statistique en turbulence

En abandonnant l'hypothèse d'auto-similarité de K41, on perd aussi la pertinence des raisonnements dimensionnels simples. Il s'agit dans un premier temps d'étudier le "multiscaling" des fonctions de structure $\mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] \sim r^{\zeta(q)}$. Se pose alors la question de l'estimation pratique de ce type d'exposants (voir Ch. **IV** où nous abordons cette question d'un point de vue général). Mais surtout, la distribution des accroissements δv_r n'est plus auto-similaire et s'écarte de plus en plus de la gaussienne observée pour $r \sim L$ quand r décroît (fig. I.1). Cette déformation a lieu au profit des grands événements qui deviennent moins rares que pour une distribution gaussienne : c'est l'intermittence statistique.

3.1 L'intermittence, une question essentielle ?

La compréhension du phénomène d'intermittence en turbulence est-elle un objectif essentiel ? A notre connaissance, aucune application de la mécanique des fluides de tient compte explicitement de l'intermittence pour l'instant. Les effets mécaniques en sont méconnus, peut-être négligeables, peut-être cruciaux. La turbulence est un processus extrêmement efficace de dissipation de l'énergie ; la maîtrise de ce processus est un enjeu essentiel.

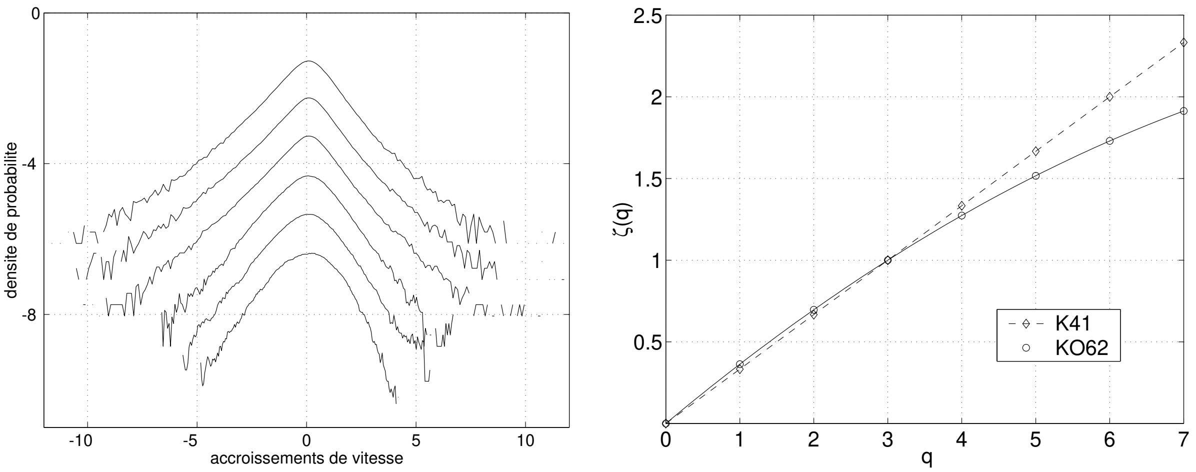

Fig. I.1: (à g.) Diagramme log-log des distributions de probabilité des accroissements de vitesse δv_r à différentes échelles r (jet $R_\lambda \simeq 580$). Le décalage vertical est artificiel, et ne sert qu'à améliorer la lisibilité de la figure. Les distributions s'écartent de plus en plus de la gaussienne vers les petites échelles. Cette déformation est une définition possible de l'intermittence statistique. On a représenté des distributions centrées réduites pour faciliter les comparaisons. (à dr.) Exposants $\zeta(q)$ des fonctions de structure proposés par K41, $\zeta(q) = q/3$, comparés à KO62, $\zeta(q) = q/3 - \frac{k}{2}q(q-3)$ (pour $k = 0.03$).

Le phénomène d'intermittence est observé sur tous les champs de vitesses turbulents, à des nombres de Reynolds variés, dans des géométries diverses. Les raisonnements dimensionnels simples perdent alors de leur signification. Il est difficile de remonter à l'origine de cette "anomalie" cachée dans l'équation de Navier-Stokes et ses conditions aux limites. D'un point de vue purement mécanique, dynamique, l'intermittence statistique reste très mal comprise malgré de gros efforts théoriques, expérimentaux et numériques depuis plusieurs dizaines d'années (voir [76, 158] pour une revue). Notre connaissance de la turbulence se trouve entachée de nombreuses zones d'ombre dont on ignore l'importance. Un premier enjeu de l'étude de l'intermittence est de réussir à mesurer l'étendue de cette ignorance... Il est extrêmement frustrant de disposer de l'équation de Navier-Stokes sans pouvoir en tirer "grand chose" quant aux écoulement turbulents. La turbulence est-elle un seul problème ou une nébuleuse de problèmes ? Le chercheur en science fondamentale ne peut accepter de laisser une telle question en suspens. On aimerait bien aussi pourvoir observer clairement des conséquences macroscopiques du phénomène d'intermittence.

Un autre angle d'attaque possible consiste à tenter d'élaborer une physique statistique de la turbulence qui prendrait alors nécessairement en compte dès le départ le phénomène d'intermittence. On aimerait bien voir ce vieux fantasme devenir réalité, mais le chemin est semé d'embûches. L'idéal serait de mettre en évidence des paramètres macroscopiques permettant de décrire un écoulement turbulent comme la température, la pression et le volume caractérisent un gaz. On pourrait alors peut-être mesurer l'influence de l'intermittence sur ces paramètres…

On peut aussi se demander si le phénomène d'intermittence, généralement observé grâce à des mesures en un point du champ eulérien, subsiste lorsqu'on s'intéresse à la vitesse d'une particule de fluide en lagrangien. M.S. Borgas [31] propose une correspondance entre un spectre multifractal eulérien et un spectre multifractal lagrangien, tout en concluant que l'influence de l'intermittence sur la dispersion de particules semble très faible. L'étude expérimentale commence à peine puisque les toutes premières mesures expérimentales de vitesses lagrangiennes n'ont eu lieu que très récemment [93, 115, 116].

Pour le statisticien ou le spécialiste de traitement du signal, l'intermittence est une source de questions passionnantes. La propriété d'invariance d'échelle et son archétype, le mouvement brownien fractionnaire, ont suscité un grand nombre de travaux. Le formalisme multifractal fournit un cadre de réflexion très instructif et souvent efficace. Cependant, les outils de modélisation dont on dispose à ce jour dans cette direction ne sont pas entièrement satisfaisants. Mieux comprendre l'intermittence est une excellente motivation pour progresser sur des aspects de statistique et de traitement du signal. Les retombées pourront certainement se faire ressentir dans de nombreux autres domaines (télétrafic informatique, médecine, géographie, écologie, finance...).

En résumé, nous adhérons au propos de B. Mandelbrot [103] : *"I believe the study of intermittency to be very enlightening as to the nature of turbulence,"* même si nous sommes conscients de la difficulté de cette tâche puisque K. Sreenivasan [158] remarque fort justement que *"each generation of students of the subject has made incremental progress,"* chaque génération d'étudiants apportant sa petite pierre à un édifice dont on ignore la taille finale !

3.2 Kolmogorov-Obukhov 1962

En 1962, Kolmogorov et Obukhov (KO62) proposent de modifier K41 pour tenir compte dans (I.12) des fluctuations du taux de dissipation locale ε(figure I.2) :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\nu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 . \tag{I.15}$$

Le modèle KO62 introduit alors un taux de dissipation moyenné localement :

$$\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{\frac{4\pi (r/2)^3}{3}} \iiint_{\|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\|<r/2} \varepsilon(x')\, dx' \tag{I.16}$$

et proposent l'hypothèse de similarité améliorée, ou *refined similarity hypothesis*,

$$\mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] \;=\; c_q \mathbb{E}[\,\varepsilon_r^{q/3}\,]\, r^{q/3} \tag{I.17}$$

Cette hypothèse permet de relier les fluctuations des accroissements de la vitesse à celles de la dissipation locale. Remarquons qu'expérimentalement, c'est à une version 1D de la

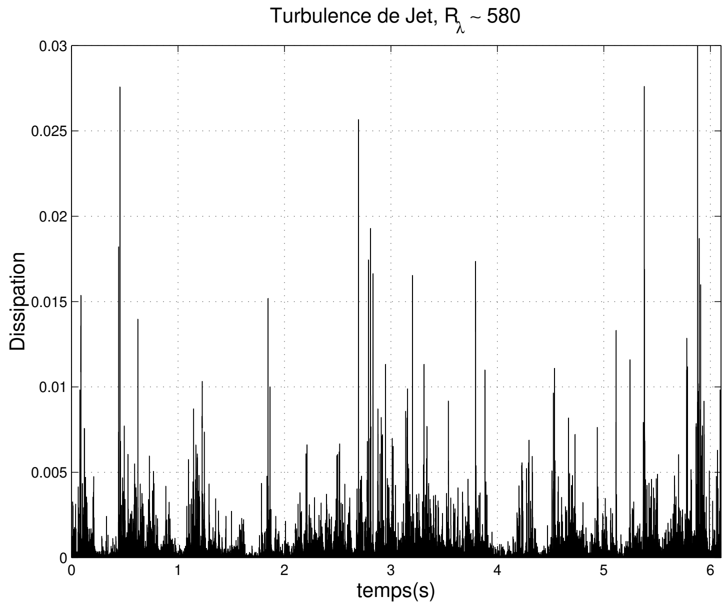

Fig. I.2: Echantillon d'un signal de dissipation (1D).

dissipation que nous avons accès. On utilise :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varepsilon(x) & = & 15\nu \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_r(x) & = & \dfrac{1}{r} \displaystyle\int_{x-r/2}^{x+r/2} \varepsilon(x')\, dx' \end{array} \right. \tag{I.18}$$

De plus, KO62 postule une distribution log-normale de ε_r (donc une distribution gaussienne pour $\ln \varepsilon_r$) qui respecte l'invariance d'échelle en imposant

$$\sigma^2_{\ln \varepsilon_r} = A + 9k \ln \frac{L}{r} \tag{I.19}$$

où k est une constante universelle. Kolmogorov obtient ainsi (figure I.1) :

$$\mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] \sim r^{\zeta(q)} \quad \text{avec} \quad \zeta(q) = \frac{q}{3} - \frac{k}{2} q(q-3) \tag{I.20}$$

De manière générale, si on suppose que les moments de ε_r se comportent en $r^{\tau(q)}$ alors $\mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] \sim r^{\tau(q/3)+q/3}$.

3.3 Premières cascades multiplicatives

Yaglom [175] et l'école russe ont proposé (1966) d'expliquer de manière heuristique le modèle log-normal KO62 par une cascade multiplicative. Nous allons détailler ce modèle car il constitue l'archétype des cascades multiplicatives (voir figure I.3). Pour simplifier, nous nous limitons à une description 1D, la version 3D se déclinant sans difficulté sur

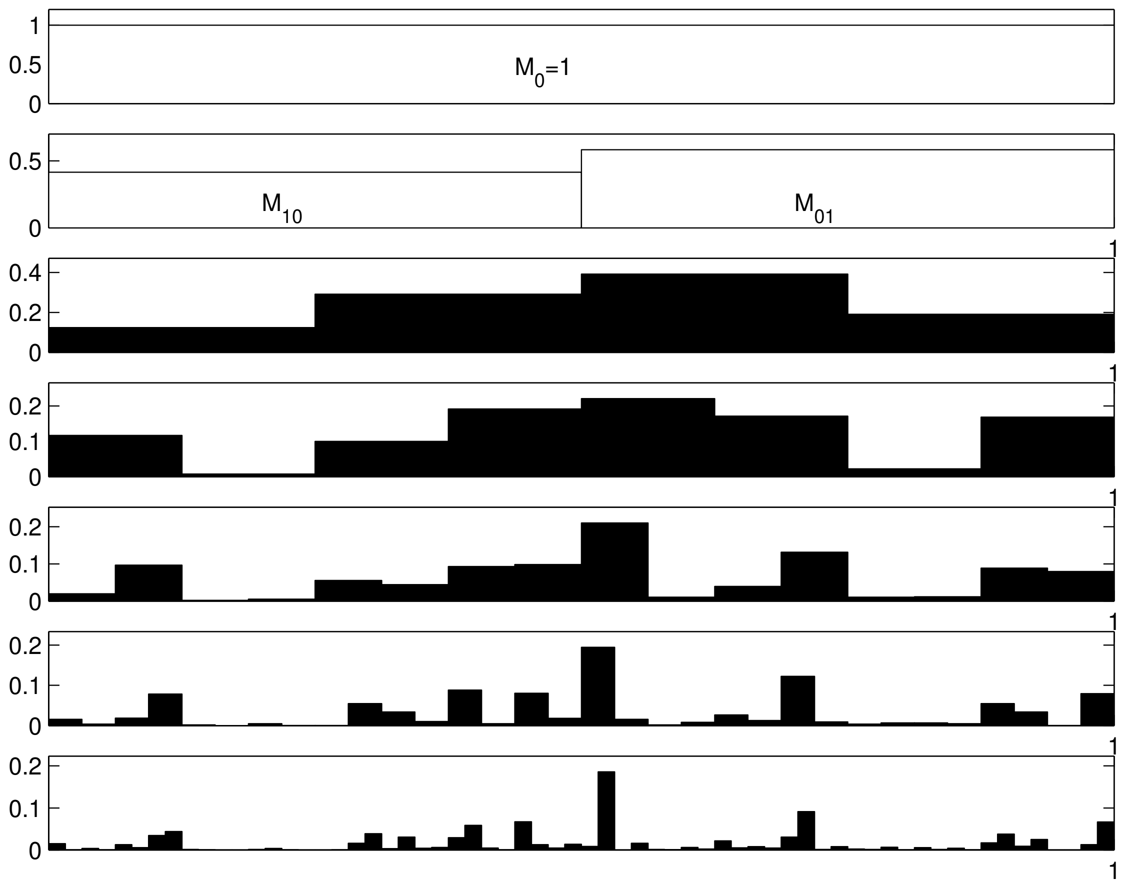

Fig. I.3: Mécanisme de construction d'une cascade binomiale. Les multiplicateurs sont ici indépendants, identiquement distribués selon une loi log-normale. La cascade illustrée ici est conservative : si M_0 est la mesure d'un intervalle *père*, alors les mesures M_{10} et M_{01} des deux sous-intervalles *fils* qui en sont issus sont telles que $M_{10} + M_{01} = M_0$.

le même principe. Il s'agit de construire ε_r, $\eta \ll r \ll L$ par une succession d'étapes identiques à partir de la grande échelle L. Considérons un intervalle I_L de taille L où la dissipation moyenne vaut ε_L. On se donne un entier quelconque $p \geq 2$, et Q une distribution d'une variable positive W. Divisons l'intervalle I_L en p intervalles égaux $I_{L/p}^{(i)}$, $1 \leq i \leq p$, auxquels on affecte respectivement les valeurs $\varepsilon_r^{(i)} = W^{(i)}\varepsilon_L$ où les multiplicateurs $W^{(i)}$ sont identiquement distribués par Q et sont indépendants. En réitérant la même étape élémentaire N fois jusqu'à $r = L/p^N$, on obtient une version de $\varepsilon_r(x)$ qui est le résultat d'une cascade multiplicative[2]. Si $\mathrm{var}(\ln W) < \infty$, $\ln \varepsilon_r - \ln \varepsilon_L$ est la somme de N variables aléatoires indépendantes qui satisferait le théorème de la limite centrale si $N \to \infty$. On en déduit que $\ln \varepsilon_r$ est approximativement gaussien, donc ε_r est approximativement log-normal. Tout tient dans ces deux "approximativement" qui n'ont pas le même sens puisqu'il sont séparés par une exponentielle. En particulier, les moments de $e^\omega = W$ sont très sensibles à un léger écart de $\omega = \ln W$ à la gaussienne (voir les très instructifs annexes de [103], Mandelbrot (1974)).

3.4 Multiplicateurs

Novikov [123] avait lui aussi rejeté (1971) l'argument de limite centrale utilisée par Yaglom. Dans ce même article de 1971, Novikov introduit les *breakdown coefficients* ou multiplicateurs (historiquement notés $q_{r,l}$)

$$W_{r_1,r_2}(x_1,x_2) = \frac{\varepsilon_{r_2}(x_2)}{\varepsilon_{r_1}(x_1)}\ , \quad r_2 \leq r_1 \tag{I.21}$$

Sa motivation est alors la recherche de lois universellement vérifiées, un peu dans l'esprit de la première hypothèse de similarité de K62 [92] que nous reproduisons fidèlement ci-dessous :

⌜

First similarity hypothesis

If $\mid \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} \mid \ll L$, $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ then the probability distribution of the values of

$$\frac{u_\alpha(\mathbf{x}^{(k)}) - u_\alpha(\mathbf{x})}{u_\alpha(\mathbf{x}^{(0)}) - u_\alpha(\mathbf{x})} \quad (\alpha = 1, 2, 3\,;\, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

depends only on the Reynolds number

$$Re \;=\; \frac{\mid u_\alpha(\mathbf{x}^{(0)}) - u_\alpha(\mathbf{x}) \mid\mid \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x} \mid}{\nu} . ⌟$$

Cette relation (11) de K62 définit en quelque sorte des multiplicateurs $\delta u_{r^{(k)}}(x)/\delta u_{r^{(0)}}(x)$ sur les accroissements de la vitesse. Plusieurs travaux seront par la suite consacrés à l'étude statistique de ces multiplicateurs, [50, 123, 124, 130, 147, 167] pour n'en citer que quelques-uns. On s'intéresse alors à leurs distributions ainsi qu'à leurs corrélations éventuelles. Les conséquences en sont déduites pour les accroissements de la vitesse δv_r en

[2] Il s'agit ni plus ni moins d'une cascade p-nômiale aléatoire non-conservative.

utilisant l'"hypothèse de similarité améliorée", ou *Kolmogorov's refined similarity hypothesis*. Plusieurs idées sont principalement à l'origine de ces démarches. L'une d'elle est l'image de la cascade de Richardson où l'énergie est redistribuée des gros tourbillons vers les plus petits de manière plus ou moins aléatoire. Les multiplicateurs rendraient compte des proportions gouvernant cette redistribution de l'énergie à travers les échelles. Les modèles de cascades multiplicatives de Yaglom (1966) [114, 175] ou de Mandelbrot [103] participent de la même intuition. Nous rediscuterons de ces approches dans le chapitre III.

3.5 Les modèles multifractals

Les modèles de cascades multiplicatives invariantes d'échelle[3] pour la dissipation ε_r ou pour les accroissements de la vitesse δv_r vont se... multiplier. Dans un article de 1974, Mandelbrot [103] propose une généralisation du modèle de Yaglom et insiste sur la nécessité d'un mariage entre analyse statistique et géométrie. Mandelbrot introduit les notions de cascades microcanonique (strictement conservative, $\sum W^{(i)} = 1$) et canonique (conservative en moyenne, $\mathbb{E}[\sum W^{(i)}] = 1$). De plus, il s'interroge sur le rôle de la géométrie du découpage de l'espace qu'implique une cascade (cubes, sphères, tubes...). Quelques années après (1983), Parisi & Frisch [77] développent le premier modèle multifractal de la turbulence. Une grande variété de modèles multifractals suivra [76]. On interprète alors la transformée de Legendre des exposants $\tau(q)$ ou $\zeta(q)$ comme un spectre (multifractal) de singularités[4] (voir Ch. **II**). Le spectre multifractal s'interprète comme une image des différentes singularités présentent dans le signal, quantifiant ainsi son degré d'irrégularité, sa rugosité. Le formalisme multifractal nous renvoie une fois de plus à une interprétation en termes de cascade multiplicative. En effet, pratiquement toutes les constructions de signaux multifractals (mesures, fonctions, processus) utilisent une cascade multiplicative.

3.6 Cascades log-infiniment divisibles

En résumé, il ressort essentiellement trois observations de ce que nous venons de rappeler :

(a) l'hypothèse d'invariance d'échelle associée à des relations du type

$$\ln \mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] = \zeta(q)\,\ln \frac{r}{L} + Cte$$

n'est jusqu'ici jamais remise en question, même à nombre de Reynolds fini,

(b) les estimations effectuées, numériques ou expérimentales, montrent toutes

$$\zeta(q) \neq \frac{q}{3},$$

(c) les cascades multiplicatives sont manifestement un outil pertinent.

[3] Respectant les lois d'échelle : $\mathbb{E}[\,|\,\delta v_r\,|^q\,] \sim r^{\zeta(q)}$.

[4] Le cas auto-similaire $\zeta(q) = q/3$ correspond au cas monofractal où un seul type de singularité caractérisé par $H = 1/3$ est présent.

Or le point (a), que la plupart des auteurs ont le plus grand mal à remettre en question, résiste mal à l'examen expérimental. L'invariance d'échelle est une propriété forte, jamais strictement vérifiée dans la réalité expérimentale toujours contrainte par l'existence d'une plus grande et/ou d'une plus petite échelle accessible. Par contre, il peut arriver plus fréquemment qu'on observe des lois de puissance liant entre elles des fonctions de partition d'ordres différents. En turbulence ce comportement est connu sous le nom d'*Extended Self-Similarity* (E.S.S.) [18, 30] pour les fonctions de structure[5]. On dit que l'ESS est vérifiée lorsque les moments d'ordres différents sont des lois de puissance l'un de l'autre dans toute la gamme d'échelles disponibles (pas seulement dans une zone inertielle) :

$$\mathbb{E}[\mid \delta v_r \mid^q] = A_{p,q} \left(\mathbb{E}[\mid \delta v_r \mid^p]\right)^{H(q)/H(p)} \quad , \forall\, \eta \lesssim r \lesssim L. \tag{I.22}$$

Ce type de lois d'échelle relatives a pu aussi être observé en analyse d'images naturelles [166] et en télétrafic informatique [168].

Au début des années 90, B. Castaing *et al.* [43, 44] ont proposé d'interpréter les lois d'échelles en termes d'évolution des distributions (voir 1.4) et généralisé cette interprétation au cas non-invariant d'échelle. Les présentations les plus claires se trouvent certainement dans [40, 41, 42]. Seules des lois d'échelle relatives restent nécessaires. D'autres comme Novikov [124] et Saito [147] ont évoqué des cascades log-infiniment divisibles mais toujours en conservant l'invariance d'échelle. Dans [43], Castaing, Gagne & Hopfinger (1990) proposent pour la première fois d'abandonner l'invariance d'échelle pour décrire leurs résultats expérimentaux en remplaçant (I.19) de KO62 par[6]

$$\sigma^2_{\ln \varepsilon_r} \propto \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta} \neq -\ln\frac{r}{r_0} \tag{I.23}$$

On renonce alors aux interprétations habituelles du formalisme multifractal (dimensions fractales...) pour gagner en souplesse dans la description des données expérimentales. Dans une lettre [42] de 1995, Castaing & Dubrulle insistent dans cette voie en suggérant qu'on ne garde que l'essentiel dans une écriture généralisée des lois d'échelles (I.20) de la forme

$$\mathbb{E}[\mid \delta v_r \mid^q] = \exp\left[-H(q)\, n(r)\right].\mathbb{E}[\mid \delta v_L \mid^q] \quad , \forall\, \eta \lesssim r \lesssim L. \tag{I.24}$$

où l'on a éventuellement $n(r) \neq \ln(L/r)$. La propriété essentielle est la séparation des dépendances en les variables q et r : $H(q)n(r)$. Il faut noter que cette écriture est cohérente avec l'observation expérimentale de "l'auto-similarité étendue", ou "Extended Self-Similarity" [18, 30] (ESS).

Il y a en fait équivalence entre (I.22) et (I.24). Un tel formalisme est, comme nous le verrons par la suite, à la fois très riche et très souple. Les deux quantités qu'il faut étudier et interpréter sont les fonctions $H(q)$ et $n(r)$. Nous verrons que $e^{-H(q)}$ correspond aux moments d'une variable aléatoire log-infiniment divisible $\widetilde{W}$ telle que $\mathbb{E}[\widetilde{W}^q] = e^{-H(q)}$

[5] La propriété d'E.S.S. n'a pas été immédiatement interprétée en termes de cascades log-infiniment divisibles, mais plutôt en termes d'amélioration de la qualité des estimateurs d'exposants de lois d'échelle.

[6] $\left(\dfrac{1-(r/r_0)^{-\beta}}{-\beta}\right) \xrightarrow[\beta\to 0]{} -\ln(\dfrac{r}{r_0})$.

(ainsi le modèle log-normal fait partie de cette catégorie de modèles) mais peut recevoir beaucoup d'autres interprétations intéressantes. Dans un premier temps, nous pouvons nous limiter à voir la fonction $n(r)$ comme la profondeur de la cascade à l'échelle r ; nous préciserons cette lecture en l'enrichissant.

Remarque : on peut reconnaître dans l'article de Novikov [123] de 1971 les prémices de cette démarche. Novikov avait en effet déjà proposé une relation très similaire à (I.24) pour décrire les distributions des multiplicateurs, mais limitée au cas où $n(r) = \ln(L/r)$ et sans détailler les propriétés de $H(q)$. Cet article ne fait pas encore le lien avec les distributions infiniment divisibles. Cependant, sans voir à l'époque les généralisations possibles de son approche, Novikov avait déjà posé des jalons extrèmement intéressants, allant même jusqu'à évoquer les cumulants de la distribution du logarithme des multiplicateurs, les *breakdown coefficients*.

La relation (I.24) s'interprète en utilisant les distributions P_r de $\ln \mid \delta v_r \mid$ comme la transformée de Laplace de la relation :

$$\begin{aligned} P_r(\ln \mid \delta v_r \mid) &= \left[G^{\star n(r)} \star P_L\right](\ln \mid \delta v_r \mid) \\ &= \int G^{\star n(r)}(\ln \widetilde{W})\; P_L(\ln \mid \delta v_r \mid - \ln \widetilde{W})\; d\ln \widetilde{W} \end{aligned} \tag{I.25}$$

où $\star$ désigne la convolution et G est une distribution à laquelle on associe la variable aléatoire $\ln \widetilde{W}$ telle que les moments de $\widetilde{W}$ vérifient :

$$\mathbb{E}[\, \widetilde{W}^q \,] = \underbrace{\mathbb{E}[\, \exp(q \ln \widetilde{W}) \,]}_{\text{fonct. génératrice de } G(\ln \widetilde{W})} = \exp(-H(q)). \tag{I.26}$$

Nous voyons ici qu'il pourra s'avérer pertinent de s'intéresser aux cumulants de $\ln \widetilde{W}$, donc aux cumulants de $\ln \mid \delta v_r \mid$. En effet, par définition des cumulants $C_k(\ln \widetilde{W})$ on a (voir aussi **II**.3.2.3) :

$$\mathbb{E}[\, \exp(q \ln \widetilde{W}) \,] = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\ln \widetilde{W}) \frac{q^k}{k!}. \tag{I.27}$$

Les distributions des accroissements se déforment ainsi selon un mécanisme qui consiste à les convoluer $n(r)$ fois avec un noyau élémentaire d'évolution G. La quantité $G^{\star n(r)}$ est appelée *propagateur*. La convolution de deux distributions est la distribution de la somme des variables aléatoires associées (à condition que ces deux variables soient indépendantes). Par conséquent, la relation (I.25) se lit aussi en utilisant une écriture abusivement simplifiée :

$$\begin{aligned} \text{''} \quad \ln \mid \delta v_r \mid &\overset{d}{=} \underbrace{\ln \widetilde{W}^{(1)} + \ln \widetilde{W}^{(2)} + \ldots + \ln \widetilde{W}^{(n)}}_{n(r)\ fois} + \ln \mid \delta v_L \mid) \quad \text{''} \\ \text{''} \quad \mid \delta v_r \mid &\overset{d}{=} \widetilde{W}^{n(r)} \quad . \quad \mid \delta v_L \mid \quad \text{''} \end{aligned} \tag{I.28}$$

Cette lecture suggère fortement une structure multiplicative, même si la variable $\widetilde{W}$ n'a pas a priori d'existence physique concrète dans cette interprétation : il faut bien distinguer les variables W et $\widetilde{W}$ respectivement définies par (I.21) et (I.26) (voir discussion du Ch. **III**). Comme la distribution de $\widetilde{W}$ est nécessairement log-infiniment divisible on parle de *cascade log-infiniment divisible*. Nous y reviendrons plus en détail (Ch. **II** § 3 et Ch. **III** notamment). Notre travail se situe dans le prolongement de cette approche, en utilisant le plus souvent les coefficients d'ondelette plutôt que les accroissements de la vitesse. Nous nous sommes attachés à en tirer la compréhension la plus complète possible pour l'exploiter ensuite au mieux dans l'analyse de données expérimentales. Cette thèse vient compléter sous certains aspects les thèses d'Olivier Cadot [34], intitulée *Etude des structures de basse pression dans la turbulence développée*, de Stéphane Roux [142], intitulée *Analyse en ondelettes de l'auto-similarité de signaux en turbulence pleinement développée*, et de Yann Malécot [100], intitulée *Intermittence en turbulence 3D : statistiques de la vitesse et de la vorticité*.

Cette introduction à l'intermittence en turbulence ne prétend pas à l'exhaustivité. Beaucoup d'idées et de travaux intéressants n'ont pas été mentionnés. L'objectif principal était de préciser notre point de vue, notre état d'esprit. Nous serons amenés plus loin (Ch. **III**) à montrer les liens ou différences qui existent entre les cascades log-infiniment divisibles et d'autres approches. Nous reviendrons en particulier sur les tentatives d'établir une équation de Langevin [107] ou de Fokker-Planck [13, 55, 75, 176].

4 Structures cohérentes : l'intermittence spatio-temporelle

Au milieu du désordre apparent que tout l'arsenal statistique évoqué plus haut s'efforce de décrire, il est maintenant bien établi que des "structures cohérentes" naissent et meurent de manière intermittente. On parle d'*intermittence spatio-temporelle*. Il est très tentant de lier implicitement la variabilité des signaux mesurés (l'intermittence statistique) à la variabilité dynamique et géométrique de l'écoulement (l'intermittence spatio-temporelle). Pourtant la question reste ouverte.

Des propriétés géométriques particulières distinguent les zones de forte dissipation ou de grande vorticité [32, 88, 137, 173]. Plusieurs observations expérimentales [62, 94] et numériques [83, 152, 156] ont montré que les régions de forte vorticité s'organisent en vortex filamentaires (fig. I.4 et I.5). Ils semblent très robustes et survivent aux fluctuations du champ de contrainte turbulent [171]. Quelques travaux se concentrent sur le lien entre certaines structures cohérentes et les lois d'échelles. Mentionnons par exemple le modèle de vortex de Lundgren [98, 99] : l'évolution en temps de ce vortex spiralé est compatible avec un spectre en $k^{-5/3}$. On peut dès lors essayer d'imaginer un écoulement turbulent comme une distribution de tels vortex ayant atteint des ages différents. Les très grands tourbillons ont une influence avérée sur la cascade turbulente aux petites échelles [12, 132]. Il a aussi été proposé [83] que de très petits tourbillons (de longueur $\sim \lambda$ l'échelle de Taylor, et de diamètre $\sim \eta$ l'échelle de Kolmogorov) contrôlent l'essentiel de l'intermittence dans la zone inertielle. Ces tailles contrastent avec celles observées expérimentalement (longueur $\sim L$, diamètre $\sim \lambda$). Même s'il reste difficile de donner une définition universelle de ce qu'est une "structure cohérente", on s'attend en tout cas à ce que "certaines structures cohérentes" jouent un rôle dans les phénomènes de transport, les mélanges... Leur caractère localisé en espace et en temps leur confère aussi un fort potentiel d'action ponctuel (cyclônes dévastateurs, remous à l'arrière des vaporetto déstabilisant les fonds vaseux de Venise...).

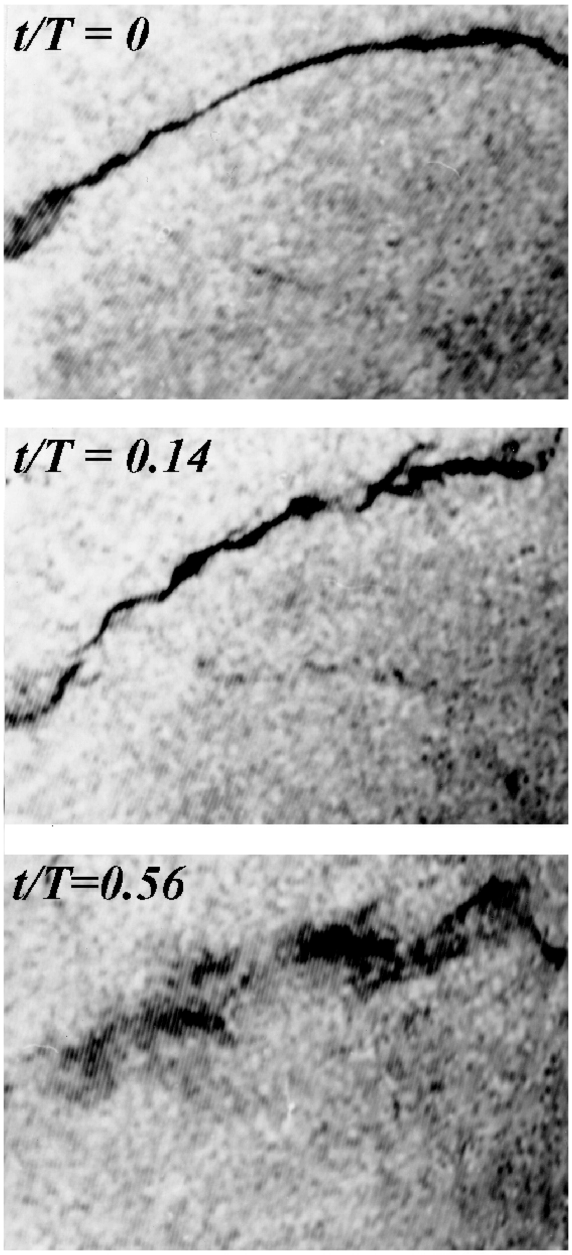

Fig. I.4: Mise en évidence expérimentale d'un vortex filamentaire dans un écoulement turbulent entre deux disques contra-rotatifs. O. Cadot [34].

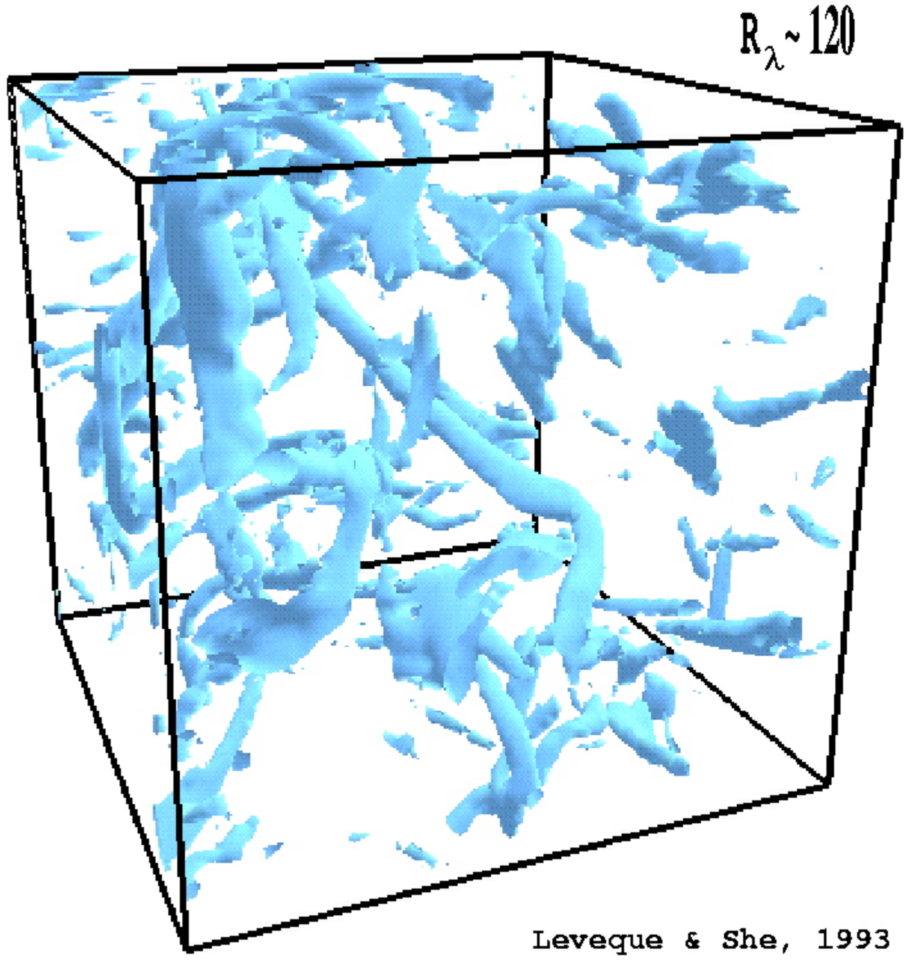

Fig. I.5: Visualisation des zones de forte vorticité dans une simulation numérique de E. Lévêque. On observe des structures filamentaires.

Filaments, nappes, volutes... si l'œil les reconnaît relativement facilement, il est beaucoup moins évident de retrouver leur trace dans un signal de type "fil chaud" et de quantifier leur influence sur la statistique du signal. Il reste difficile d'établir un lien quantitatif entre la dynamique de ces structures et la statistique de la cascade turbulente. C'est une tâche ardue puisqu'elle implique une information de nature *géométrique* dans une description *statistique*. C'est en principe possible à partir d'une simulation numérique puisqu'une description complète de l'écoulement est disponible. Expérimentalement, c'est beaucoup moins évident. Deux approches ont été développées. La première consiste à calculer les moyennes de quantités géométriques telles que les angles entre certains vecteurs. L'autre s'attache à l'estimation de moyennes conditionnelles. On identifie des événements de géométrie particulière auxquels on conditionne l'analyse statistique.

La première démarche, mise en œuvre numériquement [22] ainsi qu'expérimentalement [155, 165], a montré l'importance des effets d'alignement entre la vorticité et les vecteurs propres du tenseur des contraintes, entre la vorticité et le taux d'étirement d'un tourbillon,... Signalons aussi la thèse de B. Andreotti [13] intitulée *Action et réaction entre étirement et rotation, du laminaire au turbulent.* C'est le rôle des zones de vorticité organisée plutôt que celui des zones de grande enstrophie qui est mis en avant. On a aussi observé que la plupart des propriétés d'alignement se retrouvent à partir d'un vortex de Burgers ou d'une couche de cisaillement [12]. Les effets d'alignements sont liés à l'existence d'objets particuliers.

Dans la seconde approche, utilisant des moyennes conditionnelles, le point crucial est la détection des structures cohérentes. Construire un détecteur à partir du signal étudié grâce à des outils de traitement du signal est un choix possible. On cherche par exemple des événements de forte amplitude [4, 160] ou de grande énergie [36, 37]. L'avantage est qu'un seul signal est nécessaire. C'est aussi le principal inconvénient. Les résultats risquent fort d'être biaisés *a priori* par le choix du détecteur.

Nous utilisons dans l'étude expérimentale du chapitre **V** un détecteur construit à partir d'une mesure indépendante : la pression. Nous enregistrons simultanément la pression et la vitesse près d'une paroi d'un écoulement turbulent. Le signal de pression sert d'indicateur du passage de tourbillons filamentaires, la vitesse faisant l'objet de notre étude. Cette méthode à l'avantage d'utilisé un détecteur clairement sensible à des objets de géométrie particulière. La corrélation entre les dépressions et la présence de tourbillons filamentaires dans ce type d'écoulement a été établie dans [35, 61, 62, 67]. Nous allons montrer que le champ de vitesse est sensible au passage de filaments dans son voisinage, et estimer des quantités statistiques conditionnées à la présence de ces structures filamentaires.

Quelques questions ouvertes : quelles sont les structures importantes ? Quelle est l'origine de ces structures ? leur topologie ? leur fréquence ? leur influence sur les petites échelles ? Quelle est l'importance dynamique des tubes de vorticité ? Leur existence est-elle compatible avec les lois d'échelle espérées à haut Reynolds ? Quel est le lien entre lois d'échelle et structures cohérentes ? Le vertigineux vide qui sépare dynamique et statistique constitue l'obstacle majeur. D'autant plus qu'en turbulence rien n'est simple, ni la dynamique, ni la statistique... Les mesures expérimentales sont elles-mêmes limitées. Aucune expérience ne permet à ce jour de connaître précisément le champ de vitesse d'un écoulement en tout point et à tout instant. Les mesures en un point sont elles aussi délicates. L'utilisation d'un fil chaud n'est pas la panacée, mais il faut s'en contenter. Les simulations numériques évitent ces problèmes mais se heurtent aux capacités limitées des machines qui interdisent l'accès à des nombre de Reynolds très élevés avec une bonne résolution spatiale et temporelle. Les méthodes acoustiques exploitant l'interaction entre son et vorticité permettent de sonder directement la vorticité contenu dans un domaine restreint de l'écoulement [26]. Cette fois, c'est la complexité du dispositif expérimental et le compromis entre résolutions spatiale et fréquentielle qui posent problème.

Les travaux rapportés dans le chapitre **V** sont motivés par ces questions et font en partie suite aux recherches effectuées en D.E.A. [45]. Nous apportons quelques éléments de réponse à certaines de ces interrogations sur le rapport entre intermittence *spatio-temporelle* et intermittence *statistique*.

Chapitre II
De l'invariance d'échelle aux cascades log-infiniment divisibles

II. De l'invariance d'échelle aux cascades log-infiniment divisibles

La notion d'invariance d'échelle est le phare d'Alexandrie de ce travail. S'il nous arrivera d'en détourner le regard et même de nous en éloigner, nous ne la perdrons jamais de vue. Ce chapitre présente les ingrédients de base dont nous aurons besoin par la suite. La partie 1 rappelle les différentes facettes de l'invariance d'échelle : auto-similarité, dépendance longue, régularité locale, formalisme multifractal, multiscaling. L'outil naturel est la transformée en ondelettes qui s'avère à la fois malléable et efficace. En effet, les ondelettes elles-mêmes sont construites en respectant l'invariance d'échelle, et sont dotées de nombreuses "bonnes" propriétés que rappelle brièvement la partie 2. Par la suite, nous utiliserons systématiquement les coefficients de la transformée en ondelettes, et assez peu les accroissements du processus, le parent pauvre. La partie 3 présente formellement les cascades log-infiniment divisibles. Au-delà du formalisme multifractal et du multiscaling qui généralisent la notion d'auto-similarité, nous verrons que les cascades log-infiniment divisibles fournissent un cadre riche et souple pour étendre et décrire la notion d'invariance d'échelle. Elles permettent notamment de s'affranchir des lois de puissance (droites en log-log), où le logarithme de l'échelle $\ln a$ sert de référence, pour autoriser une dépendance en $n(a) \neq \ln a$.

1 Invariance d'échelle

Le phénomène d'invariance d'échelle est associé à l'absence d'échelle de temps ou d'espace privilégiée : toutes les échelles sont représentées sans distinction d'aucune d'entre elles. La notion d'invariance d'échelle est intimement liée aux spectres en $1/f$. Si on s'intéresse à un signal unidimensionnel, la densité spectrale de puissance fait alors apparaître une loi de puissance en $1/f^\alpha$. L'argument dimensionnel suivant permet de s'en apercevoir. Puisqu'il n'existe aucune fréquence ν caractéristique, la densité spectrale Γ vérifie

$$\forall\, \nu_1,\ \nu_2, \quad \frac{\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1)} = f(\frac{\nu_2}{\nu_1}). \tag{II.1}$$

Soient ν_1, ν_2, ν_3 trois fréquences distinctes. On déduit de la relation ci-dessus

$$f(\frac{\nu_3}{\nu_1}) = f(\frac{\nu_3}{\nu_2}).f(\frac{\nu_2}{\nu_1}), \tag{II.2}$$

d'où f, et par conséquent Γ, est une loi de puissance du type $\nu^{-\alpha}$. Plusieurs causes peuvent être séparément ou simultanément à l'origine de ce phénomène : *auto-similarité*, mais aussi *dépendance à longue portée* et *(ir)régularité locale*. Même si parfois des outils semblables permettront de décrire l'une et/ou l'autre de ces trois propriétés, elles recouvrent des situations bien distinctes.

1.1 Auto-similarité statistique

Le flocon de neige, le chou-fleur ou les lignes côtières incarnent bien la propriété d'auto-similarité. Chaque partie ou sous-partie présente le même aspect que l'ensemble. Ainsi, on ne sera pas surpris de retrouver (à de petits détails près) la pointe bretonne ou la botte italienne cachées à une échelle plus petite dans les côtes du monde entier. Nous avons vu que le modèle K41 contenait une hypothèse d'auto-similarité d'exposant $H = 1/3$. Nous donnons ici les principales définitions et propriétés liées à la notion d'auto-similarité de façon générale. Pour une présentation plus détaillée, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de référence de Samorodnitsky et Taqqu [148] ainsi qu'au récapitulatif de R. Riedi sur les processus multifractals [140]. Nous désignons par $X(t)$ un processus auto-similaire quelconque, et par $\delta X(\tau, t) = X(t+\tau) - X(t)$ ses accroissements entre t et $t+\tau$.

Définition. Un processus stochastique réel $\{X(t),\ t \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^+\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H si pour tout $c > 0$

$$X(ct) \overset{fd}{=} c^H X(t) \tag{II.3}$$

ou $\overset{fd}{=}$ signifie que les processus $X(ct)$ et $c^H X(t)$ ont mêmes lois conjointes finies de probabilité. Autrement dit, pour tout $c > 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tous $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$

$$(X(ct_1), \ldots, X(ct_m)) \ \overset{d}{=} \ c^H \left(X(t_1), \ldots, X(t_m)\right) \tag{II.4}$$

où $\overset{d}{=}$ signifie l'égalité des distributions, c'est -à-dire :

$$P\left(X(ct_1), \ldots, X(ct_m)\right) \ = \ c^{-mH}\, P\left(c^H X(t_1), \ldots, c^H X(t_m)\right). \tag{II.5}$$

Une conséquence de la définition (II.3) est que, pour tout processus auto-similaire, $X(0) = 0$ presque sûrement. Les processus auto-similaires sont non-stationnaires :

$$X(t) \text{ auto-similaire } \ \Leftrightarrow \ e^{-tH} X(e^t) \text{ stationnaire.}$$

Le plus souvent, on s'intéresse aux processus auto-similaires à accroissements stationnaires. $X(t)$ est un processus *à accroissements stationnaires* si

$$X(t+\tau) - X(t) \ \overset{fd}{=} \ X(\tau) - X(0) \tag{II.6}$$

Les processus auto-similaires à accroissements stationnaires sont centrés, de même que leurs accroissements. Si elle existe, la covariance du processus X est donnée par

$$\mathbb{E}[\, X(t)X(s)\,] = \frac{\sigma^2}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), t, s > 0. \tag{II.7}$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance mathématique. Comme cette expression doit être définie positive, on a $0 < H < 1$. Par ailleurs, la propriété d'auto-similarité peut s'observer sur les moments absolus du processus

$$\forall t > 0, \forall c > 0, \quad \mathbb{E}[\mid X(ct) \mid^q] \; = \; c^{qH}\, \mathbb{E}[\mid X(t) \mid^q]. \tag{II.8}$$

Elle peut aussi s'observer sur les accroissements

$$\delta X(\tau, t) = X(t+\tau) - X(t) \tag{II.9}$$

Aux ordres q tels que $\mathbb{E}[\mid \delta X(\tau,t) \mid^q]$ existe :

$$\forall(\tau,\ t) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \mathbb{E}[\mid \delta X(\tau,t) \mid^q] \; \propto \; \tau^{qH}. \tag{II.10}$$

La densité spectrale des accroissements[1] $\delta X(\tau,t)$ obéit alors à une loi de puissance aux fréquences $\nu \ll 1/\tau$:

$$\Gamma_{\delta X(\tau,.)}(\nu) \; \sim \mid \nu \mid^{-(2H-1)} \tag{II.11}$$

En pratique, si on dispose d'une version du processus échantillonnée à la fréquence $F_e = 1/\tau_e$, la densité spectrale de puissance de $\delta X(\tau_e, t)$ obéit à une loi de puissance dans pratiquement toute la gamme des fréquences accessibles $[0,\ F_e/2]$.

Une autre écriture possible de la relation (II.10) est :

$$\forall(\tau_1,\tau_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \mathbb{E}[\mid \delta X(\tau_2,t) \mid^q] \; = \; \exp\left\{-qH.\ln\frac{\tau_1}{\tau_2}\right\}\, \mathbb{E}[\mid \delta X(\tau_1,t) \mid^q] \tag{II.12}$$

qui relie les moments des accroissements sur des intervalles de temps différents τ_1 et τ_2 en faisant apparaître la quantité $\ln \tau_1/\tau_2 = (-\ln\tau_2) - (-\ln\tau_1)$. Il faut garder en mémoire cette relation que nous allons par la suite interpréter puis généraliser en la libérant progressivement de ses contraintes d'auto-similarité pure (du cas monofractal au cas multifractal), puis d'invariance d'échelle (cascades log-infiniment divisibles). Enfin, observons que l'invariance d'échelle est ici une propriété *globale* du processus, au sens où les lois d'échelle sont vérifiées pour tout τ.

Remarque : il peut arriver que l'on n'observe pas l'invariance d'échelle pour toutes les échelles disponibles à l'analyse mais seulement pour des échelles respectant une suite géométrique. La relation (II.3) n'est alors valable que pour $c = c_0^n$. On parle d'invariance d'échelle discrète. P. Borgnat s'intéresse dans son travail de thèse à ce type de processus.

Nous présentons ci-dessous deux classes de processus auto-similaires particulièrement importantes : les mouvements browniens fractionnaires et les mouvements α-stables fractionnaires.

[1] Les processus auto-similaires étant non stationnaires, on ne peut pas leur associer de densité spectrale de puissance ; si le processus est à accroissements stationnaires on pourra définir la densité spectrale des accroissements et définir par intégration un spectre moyen du processus.

1.1.1 Mouvement brownien fractionnaire.

L'archétype des processus auto-similaires à accroissements stationnaires est le *mouvement brownien fractionnaire* (en abrégé **fBm**, pour **f**ractional **B**rownian **m**otion). Il a été introduit par Mandelbrot et Van Ness [106]. Certains aspects en avaient déjà été étudiés par Kolmogorov [89], pratiquement au même moment que la théorie dite Kolmogorov 41 en turbulence. Il sert très souvent (toujours ?) d'exemple de référence pour une raison simple : c'est à la fois le plus simple et l'un des seuls qu'on connaisse vraiment bien. Le fBm d'exposant $H = 1/3$ a été souvent comparé en turbulence au signaux de vitesse issus de mesures d'anémomètre à fil chaud. Ce processus est le seul processus *gaussien, auto-similaire à accroissements stationnaires* [73, 148]. Il est en général désigné par $B_H(t)$. De plus, on sait synthétiser un fBm d'indice H quelconque. Plusieurs méthodes existent. Nous utilisons la méthode à base d'ondelettes exploitant les résultats de Meyer et Sellan [8] (consulter [51] pour une revue des méthodes). Le fBm présente cependant les défauts de ses qualités. Il est tellement riche de propriétés "agréables" qu'il n'est parfois ni simple ni justifié de s'en inspirer pour généraliser à d'autres processus un raisonnement valable pour lui.

Le processus accroissement associé au fBm est le *bruit gaussien fractionnaire* (en abrégé **fGn**, pour **f**ractional **G**aussian **n**oise) souvent désigné par $G_{H,\tau}(t)$. En résumé, les propriétés essentielles du fBm que nous utiliserons sont les suivantes. Il s'agit d'un processus gaussien :

$$P_t(B_H) = \mathcal{N}(0, \sigma^{2H} t^{2H}) \tag{II.13}$$

où P_t désigne la distribution du processus à l'instant t, et $\mathcal{N}(0, \sigma^{2H} t^{2H})$ la loi normale de moyenne nulle et de variance $\sigma^{2H} t^{2H}$. Sa fonction d'auto-covariance est décrite par :

$$\operatorname{cov}(B_H(t), B_H(s)) = \mathbb{E}[B_H(t) B_H(s)] = \frac{\sigma^2}{2} \left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right) \tag{II.14}$$

Les accroissements stationnaires $G_{H,\tau}$ du fBm sont gaussiens :

$$P_\tau(\delta B_H(\tau) = G_{H,\tau}) = \mathcal{N}(0, \sigma^{2H} \tau^{2H}) \tag{II.15}$$

où P_τ désigne la probabilité marginale des accroissements $G_{H,\tau}$. La covariance entre processus et accroissements est donnée par

$$\operatorname{cov}(B_H(t), G_{H,\tau}(t)) = \frac{\sigma^2}{2} \left((t+\tau)^{2H} - t^{2H} - \tau^{2H} \right) \tag{II.16}$$

Enfin, les moments des accroissements vérifient les lois d'échelle :

$$\forall\, \tau, \quad \mathbb{E}[\,|\, \delta X \,|^q (\tau)] \propto |\, \tau \,|^{qH} \tag{II.17}$$

Nous verrons par la suite d'autres propriétés du fBm, conséquences plus ou moins directes de celles-ci.

1.1.2 Mouvements α-stables fractionnaires.

Si, à partir du fBm, on abandonne l'hypothèse de variance finie, on tombe sur les processus α-stables H-auto-similaires à accroissements stationnaires [148]. Une variable aléatoire symétrique α-stable $X_\alpha = S\alpha S(\sigma)$ de moyenne μ est définie par sa fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}[e^{iqX_\alpha}] = \exp\left(-\sigma^\alpha |q|^\alpha + i\mu q\right), \quad 0 < \alpha \leq 2 \tag{II.18}$$

La somme de deux variables aléatoires α-stables indépendantes est elle-même α-stable. La fonction de distribution n'est en général pas explicitement connue. Deux cas particuliers sont la loi normale ($\alpha = 2$) et la loi de Cauchy ($\alpha = 1$) [69]. Dans tous les cas ($\alpha < 2$), les ailes de la distribution décroissent en loi de puissance

$$P\{X_\alpha > \lambda\} \sim P\{X_\alpha < -\lambda\} \sim C_\lambda \frac{\sigma^\alpha}{\lambda^\alpha}, \qquad \lambda \to +\infty \tag{II.19}$$

Une conséquence importante est que les moments de la valeur absolue $\mathbb{E}|X_\alpha|^r$ n'existent que pour $-1 < r < \alpha$ ($\alpha < 2$). Cette remarque aura de l'importance quant aux problèmes d'estimation évoqués dans le chapitre **IV**. On peut montrer que nécessairement $H \leq \max(1, 1/\alpha)$, et que les accroissements du processus sont indépendants si et seulement si $H = 1/\alpha$. Le paramètre α décrit l'irrégularité du processus, tandis que $d = H - 1/\alpha$ rend compte des dépendances présentes dans le processus ; H en est un mélange. Par opposition au caractère unique du fBm, pour une valeur de α donnée, il existe une infinité de processus α-stables auto-similaires à accroissements stationnaires [134, 135]. Nous reviendrons sur certaines propriétés de ces processus au chapitre **IV**, partie 3.

1.2 Dépendance à longue portée

Une autre propriété ayant pour conséquence l'invariance d'échelle est la *dépendance à longue portée*. Dans le domaine expérimental, on parle de *dépendance longue* lorsque les observations aux temps longs restent "irrémédiablement" corrélées aux observations aux temps courts. La propriété de dépendance longue est en général définie pour un processus stationnaire par :

$$\begin{cases} c_X(\tau) \sim \tau^{-\beta}, \quad \tau \to +\infty, \quad \beta \in [0,\, 1] \\ \displaystyle\int c_X(\tau) d\tau \;=\; +\infty \end{cases} \tag{II.20}$$

C'est donc le comportement asymptotique en loi de puissance de la fonction d'autocorrélation associée à la divergence de sa somme qui définit la dépendance à longue portée. Le spectre obéit alors à une loi de puissance au voisinage de l'origine :

$$\Gamma_X(\nu) \sim |\nu|^{\beta-1}, \quad |\nu| \to 0 \tag{II.21}$$

Notons que la propriété d'invariance d'échelle est vérifiée ici dans une gamme de fréquence limitée supérieurement. Son origine est essentiellement *grande échelle* puisqu'elle concerne les basses fréquences. Il peut être intéressant de remarquer au passage que la divergence de la somme de l'autocorrélation évoque un coefficient de diffusion infini. En physique statistique, la formule de Kubo relie la fonction d'autocorrélation de la vitesse de particules diluées au coefficient de diffusion par :

$$D = \frac{1}{3}\int_0^\infty \mathbb{E}[\,\vec{v}_1(s)\,\vec{v}_1(0)\,]\,ds \tag{II.22}$$

Exemple : la fonction d'autocovariance du fGn s'écrit

$$\mathbb{E}[G_{H,\tau}(t)G_{H,\tau}(t+\theta)] = \frac{\sigma^2}{2}\left(|\theta+\tau|^{2H} - 2|\theta|^{2H} + |\theta-\tau|^{2H}\right) \tag{II.23}$$

d'où

$$\mathbb{E}[G_{H,\tau}(t)G_{H,\tau}(t+\theta)] \simeq [\sigma^2 H(2H-1)\tau^2]\,\theta^{2H-2}, \quad \theta \gg \tau, H \neq \frac{1}{2} \tag{II.24}$$

Le fGn présente donc le phénomène de longue dépendance[2] pour $H \in]1/2,\,1[$. Dans une large gamme de fréquences s'étalant à partir de l'origine, le spectre du fGn obéit à un comportement du type

$$\Gamma_{fGn}(\nu) \sim |\nu|^{-(2H-1)} \tag{II.25}$$

Malgré le caractère non stationnaire du fBm, on peut alors qualitativement lui associer par intégration un spectre moyen [71] :

$$\Gamma_{fBm}(\nu) \sim |\nu|^{-(2H+1)} \tag{II.26}$$

Le fGn, et par conséquent de manière heuristique le fBm, illustrent le phénomène de dépendance à longue portée.

1.3 Régularité locale : régularité höldérienne

La dépendance longue entraîne une invariance d'échelle aux grandes échelles, observable aux basses fréquences. En contraste avec le paragraphe précédent, nous nous intéressons maintenant à une origine *petites échelles* de l'invariance d'échelle, observable aux hautes fréquences.

Définition. Le degré de régularité locale de Hölder $H(t)$ d'un processus continu $X(t)$ à la date t s'évalue par comparaison avec une fonction algébrique selon :

$$h(t) = \sup\{h' \;\big/\; X \in C_t^{h'}\}, \tag{II.27}$$

où X appartient à $C_t^{h'}$ s'il existe un polynôme P_t tel que

$$|X(s) - P_t(s)| \leq A|s-t|^{h'} \tag{II.28}$$

[2] Pour $H \in]0,\,1/2[$, la somme de l'autocorrélation converge, la dépendance est à courte portée. Néanmoins, la dépendance en loi de puissance conserve son intérêt dans certains contextes.

pour tout s suffisamment proche de t. $\lhd$

Lorsqu'il existe, le développement de Taylor de X à l'instant t est le "meilleur polynôme P_t [140]. Par contre, le degré de P_t n'est pas nécessairement la partie entière de $H(t)$. Dans le cas particulier où le polynôme de Taylor est connu et se résume à une constante $P_t(s) = X(t)$, on remarque que l'exposant de Hölder $h(t)$ décrit le comportement en loi de puissance des accroissements :

$$X(t+\tau) - X(t) \underset{\tau \to 0}{\simeq} C(t) \mid \tau \mid^{h(t)} \tag{II.29}$$

On caractérise ainsi la douceur ou la *rugosité* du graphe de la fonction. Par exemple, lorsque $0 \leq h < 1$, la fonction n'est pas dérivable en t.

Supposons que les accroissements d'un processus aléatoire stationnaire au second ordre[3] $X(t)$ suivent un comportement en loi d'échelle :

$$\mathbb{E}\left[(X(t+\tau) - X(t))^2\right] \sim |\tau|^{2h}, \qquad \tau \longrightarrow 0. \tag{II.30}$$

Cette propriété statistique décrit la régularité locale des trajectoires de X. Les trajectoires présentent un aspect d'autant plus irrégulier, rugueux, que h est proche de 0. Il apparaît un lien entre *statistique* et *géométrie* des trajectoires. La fonction d'autocovariance est alors telle que

$$\mathbb{E}[X(t)X(t+\theta)] \sim \sigma^2(1 - A\theta^{2h}), \quad \theta \longrightarrow 0, \tag{II.31}$$

et le spectre du processus suit un comportement en loi de puissance aux grandes fréquences :

$$\Gamma_X(\nu) \sim |\nu|^{-(2h+1)}, \qquad \nu \longrightarrow +\infty. \tag{II.32}$$

Pour les processus stationnaires, l'exposant h est par définition le même à tout instant t : on parle de régularité *globale*. L'invariance d'échelle provient dans ce cas d'une propriété d'essence *locale* vérifiée de façon *globale* par le processus. Réciproquement, si un processus X non stationnaire à accroissements stationnaires vérifie :

$$\mathbb{E}\left[(X(t+\tau) - X(t))^2\right] \sim |\tau|^{2h}, \qquad \tau \longrightarrow 0. \tag{II.33}$$

l'exposant h caractérise la régularité locale des trajectoires de X. Un processus gaussien ayant ces propriétés se comporte localement comme un mouvement brownien fractionnaire de paramètre $H = h$: on parle d'*auto-similarité locale* [28, 52].

Retour sur les processus auto-similaires : exemple du fBm. Le développement limité de (II.23) pour $\theta \ll \tau$ donne

$$\mathbb{E}[G_{H,\tau}(t)G_{H,\tau}(t+\theta)] \simeq \sigma^2\tau^{2H}\left[1 - \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^{2H}\right], \quad \theta \ll \tau,\ H \in]\frac{1}{2}, 1]. \tag{II.34}$$

[3] C'est-à-dire que la fonction d'auto-corrélation $\gamma_X(t,\theta) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\theta)] = \gamma_X(\theta)$ ne dépend que de θ.

Le fGn est de régularité globale H. De son côté le fBm vérifie par définition

$$\mathbb{E}\left[(X(t+\tau)-X(t))^2\right] \;=\; \sigma^2\tau^{2H} \tag{II.35}$$

Le fBm est aussi de régularité globale H. Le fBm présente donc les trois propriétés d'auto-similarité, de dépendance à longue portée et de régularité locale associées à l'invariance d'échelle. Ces trois propriétés sont dans ce cas décrites par un seul et même paramètre H. L'auto-similarité jette en quelque sorte un pont entre la régularité locale aux temps courts (hautes fréquences) et la dépendance aux temps longs (basses fréquences) : les comportements en loi de puissance sont alors valables à toutes les échelles. Nous mesurons la richesse et l'intérêt d'un tel processus. Cependant, nous devons rester conscients de la confusion que peut éventuellement engendrer l'utilisation du fBm comme illustration de l'une ou l'autre de ces propriétés, surtout si l'on se souvient que le fBm est de plus un processus *gaussien*. Enfin, les mouvements browniens fractionnaires sont décrits par le seul paramètre H, ce qui en fait un modèle peut flexible lorsqu'il s'agit de décrire des données expérimentales.

On peut généraliser dans certaines conditions la notion de régularité hölderienne à des processus non-stationnaires tels que :

$$\mathbb{E}\left[(X(s)-X(t))^2\right] \sim |s-t|^{2h(t)} \tag{II.36}$$

pour tout s suffisamment proche de t. Sous certaines conditions, l'étude de la régularité du processus se confond alors avec l'étude de la fonction $h(t)$. On pourra consulter à ce sujet les références [28, 52].

1.4 Le formalisme multifractal

Le *formalisme multifractal* établit un lien d'équivalence entre une description *géométrique*, faisant appel à la notion de dimension fractale d'un ensemble de points (spectre de Hausdorff[4]), et une description *statistique*, utilisant les lois d'échelle des moments (fonctions de partition et spectre de Legendre). Le formalisme multifractal a été développé en turbulence en particulier par U. Frisch et G. Parisi [77]. Il existe des formalismes multifractals pour les mesures, les fonctions et les processus aléatoires. Nous ne rentrons pas ici dans les détails mathématiques qui les distinguent. On pourra consulter [15, 82, 140]. Nous nous contentons de rappeler brièvement et sans justification les principales définitions et propriétés du formalisme multifractal pour un processus aléatoire ayant de "bonnes propriétés".

On parle de processus multifractal lorsque la fonction $h(t)$ a elle-même un comportement erratique. Une démarche "naturelle" consiste alors à quantifier géométriquement la taille de l'ensemble des instants tels que $h(t) = h$. Le *spectre de Hausdorff* est constitué par les valeurs des dimensions fractales[5] de Hausdorff $D(h)$ des ensembles

$$E_h \;=\; \left\{t \in \mathbb{R} \;\middle/\; h = \text{ exposant de régularité de Hölder de } X \text{ en } t\right\} \tag{II.37}$$

[4] F. Hausdorff 1868-1942.

[5] Nous identifions ici par un léger abus de langage dimension de Hausdorff et dimension fractale.

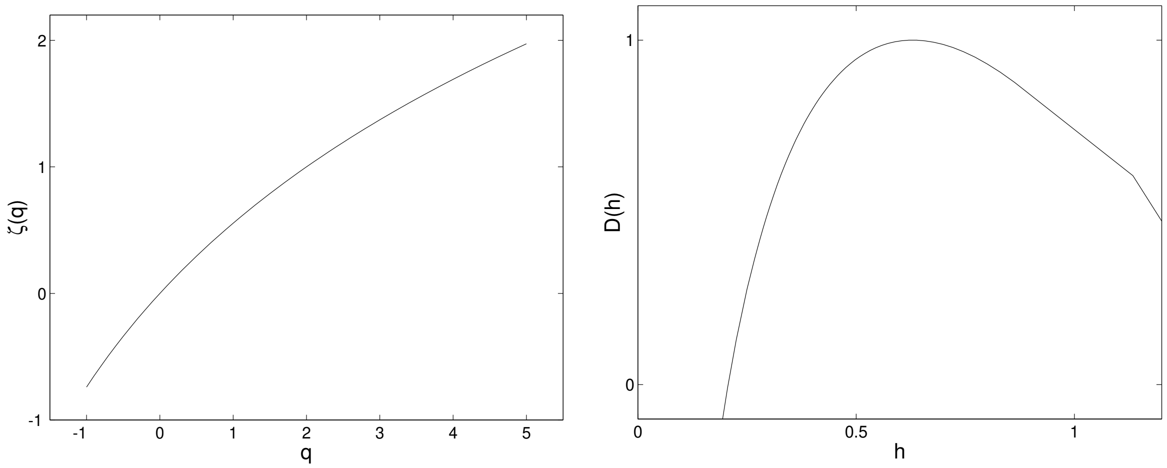

Fig. II.1: Exposants $\zeta(q)$ et spectre multifractal $D(h)$ déduit par transformée de Legendre.

Lorsque ce spectre est non-trivial (non réduit à des points ou segments de droite) le processus est dit *multifractal*[6]. Les ensembles E_h sont *fractals* : ils ont une structure complexe, et leur dimension de Hausdorff peut être non-entière. Les ensembles $\{E_h\}$ représentent une décomposition multifractale du support de X, ce qui correspond à la coexistence dans le même processus d'un grand nombre de singularités différentes. Une démarche purement géométrique présente des difficultés pratiques que les estimations statistiques permettent de contourner [140]. Plusieurs démarches sont possibles mais nous nous limiterons ici à l'utilisation du spectre de Legendre.

Définition. On dit que *le formalisme multifractal s'applique* à un processus X si le spectre de Hausdorff des singularités peut se déduire de la transformée de Legendre des exposants des lois d'échelle de fonctions de partition adéquates. $\triangleleft$

Par la suite, nous évoquerons principalement le spectre de Legendre issu des fonctions de partition menant aux moments absolus des accroissements (ou des coefficients d'ondelette) du processus (fig. II.1) :

$$S_q^\infty(\tau) = \lim_{n_\tau \to \infty} \underbrace{\frac{1}{n_\tau} \sum_{k=1}^{n_\tau} |\delta X(\tau, k\tau)|^q}_{S_q(\tau)} \tag{II.38}$$

Les quantités S_q^∞ sont appelées *fonctions de structure* par les "turbulenciers". Pour un processus ergodique on a $\mathbb{E}[S_q(\tau)] = S_q^\infty(\tau)$. On définit alors la fonction $\zeta(q)$ par :

$$\zeta(q) = \liminf_{\tau \to 0} \frac{\ln S_q^\infty(\tau)}{\ln \tau}. \tag{II.39}$$

[6] Un processus auto-similaire ou, plus généralement, un processus pour lequel on peut définir une régularité globale est dit *monofractal*.

Si de plus le processus est à accroissements stationnaires, on a $S_q^\infty(\tau) = \mathbb{E}[\mid \delta X(\tau,t) \mid^q]$. On peut alors écrire :

$$\forall q \Big/ \ \mathbb{E}[\,|\delta X(\tau)|^q\,] \text{ existe }, \quad \mathbb{E}[\,|\delta X(\tau)|^q\,] \sim \tau^{\zeta(q)}, \quad \tau \longrightarrow 0. \tag{II.40}$$

Notons en particulier, pour $q = 2$,

$$\mathbb{E}[\,|\delta X(\tau)|^2\,] \sim \tau^{\zeta(2)} \Rightarrow \Gamma(\nu) \sim \mid \nu \mid^{-\zeta(2)-1}, \quad \nu \to +\infty \tag{II.41}$$

Le spectre multifractal de Legendre $D(h)$ se déduit alors des exposants $\zeta(q)$ par transformée de Legendre [140] :

$$D(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} [qh - \zeta(q)] \tag{II.42}$$

Une écriture de (II.40) similaire à l'équation (II.12) où l'on a remplacé qH par $\zeta(q)$ donne

$$\mathbb{E}[\mid \delta X(\tau_2) \mid^q] \underset{\tau_1,\tau_2 \to 0}{\simeq} \exp\left\{-\zeta(q).\ln\frac{\tau_1}{\tau_2}\right\} \mathbb{E}[\mid \delta X(\tau_1) \mid^q] \tag{II.43}$$

Nous y reviendrons au paragraphe 3. Nous utiliserons ensuite systématiquement la version générale de cette expression en remplaçant les accroissements par les coefficients d'une transformée en ondelettes. L'utilisation d'une transformée de Legendre évoque une interprétation thermodynamique du spectre multifractal où h, q, $\zeta(q)$ et $D(h)$ s'interprètent respectivement comme une énergie interne, l'inverse d'une température, une énergie libre et une entropie. On pourra consulter la référence [15] pour une présentation plus complète.

Notons que les processus multifractals sont naturellement associés aux structures multiplicatives (cascades). Cette intuition est renforcée par le fait qu'une structure multiplicative est systématiquement mise en jeu dans les processus multifractal connus jusqu'à aujourd'hui. On utilise par exemple très souvent les mesures auto-similaires[7] (voir Chap. **IV**, 3) dont la construction s'appuie sur une cascade multiplicative arborescente (figure I.3 p.23).

1.5 Lois de puissance : "multiscaling"

En pratique, un comportement en loi de puissance des fonctions de structure est assez communément observé mais dans une gamme de τ bornée à la fois supérieurement et inférieurement :

$$S_q^\infty(\tau) \simeq A \mid \tau \mid^{\zeta(q)}, \quad \tau_m \lesssim \tau \lesssim \tau_M. \tag{II.44}$$

Les fonctions de structure[8] vérifient alors une relation similaire à (II.43) :

$$S_q^\infty(\tau_2) \ \simeq \ \exp\left\{-\zeta(q).\ln\frac{\tau_1}{\tau_2}\right\} \ S_q(\tau_1), \quad \tau_m \lesssim \tau_1, \tau_2 \lesssim \tau_M. \tag{II.45}$$

[7] Un procédé de synthèse de processus multifractal est la *subordination multifractale*. Elle consiste à construire un processus multifractal $Y(t)$ à partir d'un processus X_H auto-similaire à accroissements stationnaires et d'une mesure multifractale $\mathcal{M}(t)$ en posant : $Y(t) = X_H(\mathcal{M}(t))$. *ex :* mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal.

[8] L'hypothèse de stationnarité des accroissements n'est pas nécessaire dans cette écriture.

Nous décrirons cette situation par le terme de *multiscaling*. Dans le cas où le multiscaling est observé dans la limite $\tau \to 0$, il y a équivalence entre multiscaling et comportement multifractal. Cependant, il est rare dans les applications que l'on puisse réellement exploiter complètement toute la richesse interprétative du formalisme multifractal en termes de régularité du processus. On cherche en général surtout à comprendre l'essence, l'origine, les conditions d'existence, de ces comportements en lois d'échelle. C'est avec cet état d'esprit que nous avons développé notre réflexion.

Dans cette première partie, nous avons résumé les différentes facettes de l'*invariance d'échelle* pour ensuite décrire les grandes lignes du formalisme multifractal et introduire la notion de multiscaling. Tous les processus que nous avons évoqués donnaient lieu à des lois d'échelle à différents ordres q. Dans un premier temps, les exposants respectaient une dépendance linéaire en q sous la forme $\zeta(q) = qH$ (processus auto-similaires) puis non linéaire $\zeta(q) \neq qH$ (processus multifractals ou multiscaling). Les lois de puissance concernées sont des lois d'échelle, et nous avons observé que le paramètre d'évolution entre deux échelles τ_1 et τ_2 ($\tau_2 < \tau_1$) était $\ln(\tau_1/\tau_2)$. L'objectif de la troisième partie sera de se donner un formalisme encore plus général, où nous abandonnerons l'invariance d'échelle traditionnelle pour remplacer $\ln(\tau_1/\tau_2) = (-\ln\tau_2) - (-\ln\tau_1)$ par $n(\tau_2) - n(\tau_1)$, où n est une fonction décroissante a priori quelconque ($\tau_2 < \tau_1 \Rightarrow n(\tau_2) - n(\tau_1) > 0$). Mais avant de progresser dans cette direction, nous faisons un petit détour par les transformées en ondelettes $T_X(a,t)$ qui pourront avantageusement remplacer les accroissements $\delta X(\tau, t)$.

2 Ondelettes et invariance d'échelle

Pourquoi quitter les accroissements pour les ondelettes ? Nous nous intéressons à l'évolution d'une quantité à travers les *échelles*. Cette quantité dépend aussi du *temps*. Nous voulons mener à bien une analyse qui soit pertinente aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine des échelles. Il nous faut par conséquent un outil doté de "bonnes propriétés" dans les deux domaines, c'est-à-dire une *représentation temps-échelle*. De plus ces "bonnes propriétés" doivent permettre l'utilisation d'estimateurs efficaces et maîtrisés, particulièrement en présence de l'invariance d'échelle (voir Chap. **IV**). Les ondelettes remplissent toutes ces conditions. Ces arguments nous poussent à délaisser les accroissements qu'on peut percevoir comme une forme "pauvre" de transformée en ondelette. Cette partie 2 consiste en une brève présentation des ondelettes, de l'analyse multirésolution, et de leurs principales propriétés.

2.1 Transformées en ondelettes

Nous nous limitons ici à donner les informations essentielles au lecteur peu familier des ondelettes et de l'analyse multirésolution. Parmi les ouvrages dédiés aux ondelettes on pourra consulter [1, 54, 102, 111].

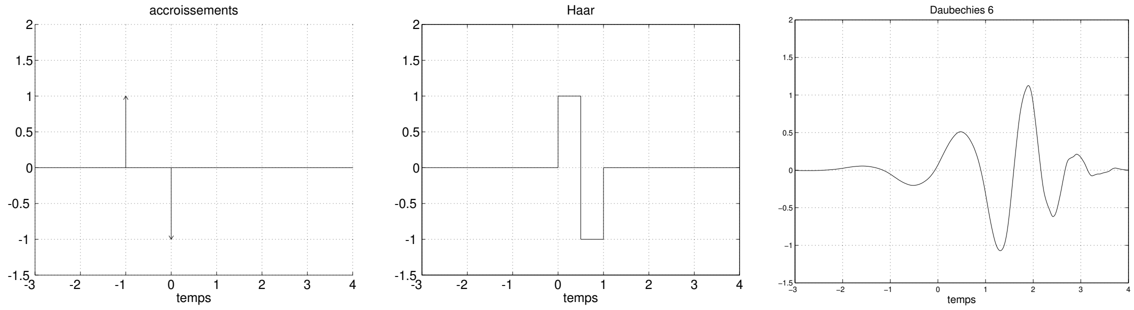

Fig. II.2: De gauche à droite, par degré de complexité croissante : les accroissements associés à la différence de deux distributions de Dirac ; l'ondelette de Haar (1 seul moment nul), dite ondelette "du pauvre", effectue la différence de deux moyennes de boîte ; l'ondelette Daubechies 6 possède 6 moments nuls, qui lui confèrent une certaine régularité, ainsi qu'une bonne localisation conjointe temps-fréquence.

Définition. Les transformées en ondelettes consistent à projeter le signal $X(t)$ à analyser sur une base de fonctions $\psi_{a,t}$. Cette famille de fonctions est obtenue par *translation* en temps et *dilatation* en échelle (analogue d'une translation en fréquence) d'un motif ψ appelé *ondelette mère* :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^2) \\ X(t) & \longrightarrow & T_X(a,t) = \langle X, \psi_{a,t} \rangle = \displaystyle\int X(u)\, \psi^*_{a,t}(u) \end{array} \tag{II.46}$$

où

$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a}\, \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) \tag{II.47}$$

Le signal pourra alors être représenté dans un espace bidimensionnel, le *plan temps-échelle.* $\triangleleft$

Cette transformation est inversible si l'ondelette mère vérifie :

$$\int |\tilde{\psi}(\nu)|^2 \, \frac{d\nu}{\nu} \;=\; C_\psi \;<\; +\infty \tag{II.48}$$

ou $\tilde{\psi}(\nu)$ est la transformée de Fourier de $\psi(t)$. Cette condition, dite *d'admissibilité*, implique une localisation suffisante de l'ondelette dans le domaine fréquentiel, mais aussi :

$$\int \psi(t)\, dt \;=\; 0 \tag{II.49}$$

Ces deux propriétés confèrent un caractère *passe-bande*, localisé en fréquence, à la fonction ψ autour de la fréquence ν_ψ. Un coefficient d'ondelette $T_X(a,t)$ rend compte de la présence d'énergie autour de la fréquence ν_ψ/a à un instant t. La formule d'inversion s'écrit :

$$X(t) \;=\; \frac{1}{C_\psi} \iint T_X(a,\tau)\, \psi_{a,\tau}(t)\, \frac{da d\tau}{a^2} \tag{II.50}$$

Nous utiliserons par la suite des transformées en ondelettes *discrètes* définies sur une grille dyadique par :

$$d_X(j,k) = T_X(2^j, k2^j) \tag{II.51}$$

La transformée discrète présente plusieurs avantages par rapport à la transformée continue. L'analyse multirésolution (voir 2.2) montre que la transformée discrète est *non-redondante* : elle contient toute l'information du signal, l'ensemble des coefficients étant nécessaires et suffisants. De plus, elle est associée à des algorithmes rapides [1].

Remarque : Les accroissements $\delta X(\tau, t)$ peuvent s'interpréter comme une forme pauvre de transformée en ondelettes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \psi(t) & = & \delta(t-\tau_0) - \delta(t) \\ T_X(a,t) & = & \displaystyle\int X(u) \left[\delta\left(\frac{u-t}{a} - \tau_0\right) - \delta\left(\frac{u-t}{a}\right)\right] \frac{du}{a} \\ & = & X(t + \underbrace{a\tau_0}_{\tau}) - X(t) \\ & = & \delta X(\tau, t) \end{array}\right. \tag{II.52}$$

2.2 Analyse multirésolution

2.2.1 Définition

Une *analyse multirésolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est définie par une suite croissante $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés emboîtés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que :

(a) $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $V_{j+1} \subset V_j$.

(b) pour toute fonction $f(t)$ de $L^2(\mathbb{R})$ et tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$f(t) \in V_j \Longleftrightarrow f(2^j t) \in V_0$$

("homothétie" de V_j sur V_0 par dilatation).

(c) pour toute fonction $f(t)$ de V_0 et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(t-k) \in V_0$ (stabilité par translation).

(d) il existe une fonction $\phi_0(t)$ de V_0 telle que l'ensemble $\{\phi_0(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$ constitue une base de Riesz (ou base inconditionnelle) de V_0.

Il est alors aisé de voir que l'ensemble des fonctions $\left\{\phi_{j,k} = 2^{-j/2}\phi_0(2^{-j}t - k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ constitue une base de Riesz de l'espace V_j.

2.2.2 Philosophie de l'analyse multirésolution

Il s'agit d'effectuer des projections successives du signal $X(t)$ à étudier sur des espaces V_j correspondant à une approximation d'autant plus grossière que j est grand :

$$\text{approx}_j(t) = \text{proj}_{V_j}\{X(t)\} = \sum_k a_{j,k}\, \phi_{j,k}(t) \tag{II.53}$$

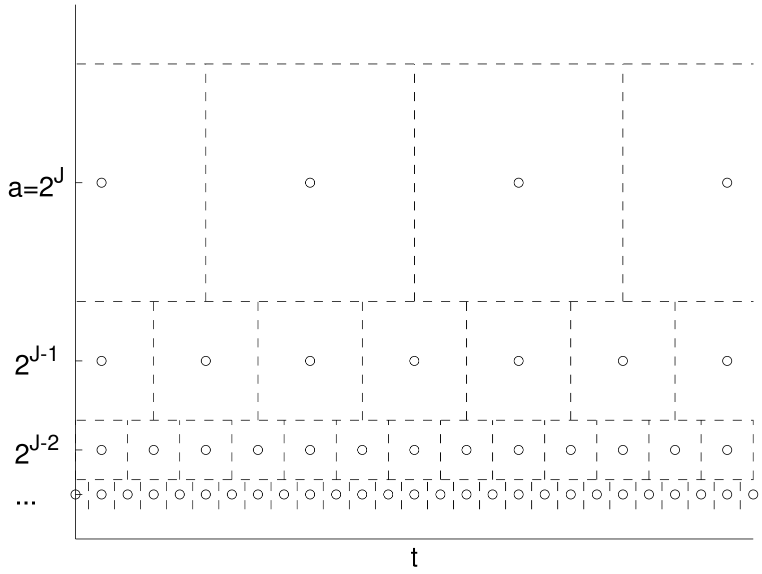

Fig. II.3: Découpage du plan temps-échelle selon une grille dyadique. Les échelles $a = 2^j$ sont réparties selon des octaves j. Les coordonnées des nœuds (o) de cette grille sont données par $(t = k2^j,\ a = 2^j)$. Les coefficients d'une transformée en ondelettes discrètes sont calculés en ces points. Les rectangles en pointillé délimitent la zone du plan temps-échelle représentée par chaque coefficient.

D'une approximation à l'autre, lorsqu'on passe de V_{j-1} à V_j, une partie de l'information est perdue. Elle est contenue dans les *détails* :

$$\text{détail}_j = \text{approx}_j - \text{approx}_{j-1} \tag{II.54}$$

Les signaux de détails peuvent aussi s'obtenir par projection du signal $X(t)$ sur des sous-espaces $\{W_j\}$ tels que :

$$\begin{cases} V_j + W_j = V_{j-1} \quad (W_j \text{ est un supplémentaire de } V_j \text{ dans } V_{j-1}) \\ \text{détail}_j(t) = \text{proj}_{W_j}\{x(t)\} \end{cases} \tag{II.55}$$

De plus, on peut associer à la fonction d'échelle ϕ_0 une fonction ψ_0 appelée *ondelette mère* telle que les fonctions $\left\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2}\psi_0(2^{-j}t - k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ constituent une base de Riesz de l'espace W_j. La fonction ϕ_0 est associée à une opération de filtrage passe-bas, tandis que ψ_0 est associée à un filtrage passe-bande. L'analyse multirésolution réécrit donc un signal $X(t)$ sous la forme d'une somme de détails et d'une ultime approximation :

$$\begin{aligned} X(t) &= \text{approx}_J(t) + \sum_{j=1}^{J} \text{détail}_j(t) \\ &= \sum_k \mathrm{a}_X(J,k)\ \phi_{J,k}(t) + \sum_{j=1}^{J}\sum_k \mathrm{d}_X(j,k)\ \psi_{j,k}(t) \end{aligned} \tag{II.56}$$

L'analyse multirésolution consiste à examiner ces fonctions $\mathrm{d}_X(j,k)$ et $\mathrm{a}_X(J,k)$, en fonction du temps et des échelles. Les coefficients $\mathrm{d}_X(j,k)$ sont calculés aux nœuds d'une grille dyadique telle que celle représentée figure II.3. Ils correspondent alors exactement aux coefficients de la décomposition en ondelettes discrète non-redondante associée à l'ondelette mère ψ_0. Réciproquement, les transformées discrètes utilisent en général implicitement une ondelette mère issue d'une multirésolution.

2.2.3 Différents degrés d'orthogonalité

Très souvent, on utilise les transformées en ondelettes orthogonales. Ce sont les plus simples à utiliser et à mettre en œuvre, ce qui explique leur succès. Par souci de clarté, nous revenons sur les différents types d'orthogonalité existant pour les analyses multirésolution. Nous avons vu que les espaces W_j étaient des supplémentaires (*a priori* quelconques) des espaces V_j. Dans le cas de la décomposition en ondelettes discrète *semi-orthogonale*, on utilise le *supplémentaire orthogonal*. On a alors :

$$\begin{cases} \forall j \neq j' \quad W_j \perp W_{j'} \\ \forall j, \quad V_j \oplus W_j = V_{j-1} \\ L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_j W_j \\ \forall j,\, j' \quad \forall k,\, k' \; \langle \psi_{j,k},\, \psi_{j',k'} \rangle \;=\; \delta(j'-j)\, f(k,k') \end{cases} \tag{II.57}$$

où $f(k,k')$ dépend de ψ_0. Pour obtenir les bases d'ondelettes *orthogonales* (les plus populaires), il faut ajouter à l'orthogonalité des espaces $\{W_j\}$ et $\{V_j\}$ entre eux, l'orthogonalité des bases $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$. On travaille alors avec une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\forall j,\, j' \quad \forall k,\, k' \; \langle \psi_{j,k},\, \psi_{j',k'} \rangle \;=\; \delta(j'-j)\, \delta(k'-k) \tag{II.58}$$

Les ondelettes de Daubechies font partie de cette classe d'ondelettes. La propriété d'orthogonalité est contraignante quant au choix de l'ondelette mère : à un facteur de phase près, il n'existe qu'une base orthonormale d'ondelette par analyse multirésolution.

Enfin, il est possible de relâcher la contrainte d'orthogonalité sur les espaces $\{W_j\}$ en utilisant une décomposition *bi-orthogonale*. On utilise une seconde analyse multirésolution V'_j et on impose l'orthogonalité croisée des deux analyses :

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbb{Z}\,, \quad W_j \perp V'_j \\ \forall j \in \mathbb{Z}\,, \quad V_j \perp W'_j \end{cases} \tag{II.59}$$

Les projections ne sont dès lors plus orthogonales. La faiblesse des contraintes imposées confère une grande souplesse d'utilisation et d'adaptation à ce type d'analyse dont la contrepartie est la présence de corrélation entre coefficients (parfois gênante en terme de lisibilité).

2.2.4 Des algorithmes rapides

En plus de la richesse et de la diversité des propriétés des analyses multirésolution, la structure emboîtée de l'analyse multirésolution permet l'élaboration d'algorithmes de calculs très rapides. Les ondelettes de Daubechies présentent l'avantage d'être facilement implantables numériquement, sans problème de troncature grâce à leur support compact. Ce sont essentiellement ces ondelettes que nous avons utilisées tout au long de ce travail. Les procédures sont implantées en MATLAB, comme l'ensemble des procédures utilisées dans ce travail. Calculer les coefficients d'ondelette $d_X(j,k)$ d'un signal de 10^6 points sur 18 échelles $j = 1..18$ pour une ondelette Daubechies 9 occupe au maximum quelques secondes sur un ordinateur de puissance moyenne (de l'an 2000...).

2.3 Quelques propriétés des ondelettes

(a) Les fonctions $\psi_{a,t}$ sont associées à des *filtres passe-bande à coefficient de surtension constant* $Q_{\psi_a} = \nu_{\psi_a}/\Delta\nu_{\psi_a} = \nu_\psi/\Delta\nu_\psi = Q_\psi$. Chaque composante fréquentielle est donc résolue avec la même précision relative. Cette propriété explique l'adaptation des ondelettes à l'étude de l'invariance d'échelle (spectre en $1/f^\alpha$...).

(b) Les ondelettes sont *localisées en temps et en fréquence.* La qualité de cette localisation temps-fréquence des briques élémentaires est à comparer à la borne inférieure du principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg (atteinte par l'ondelette de Morlet). La localisation des ondelettes de Daubechies tend vers cette limite lorsqu'on étend leur support temporel. La *régularité* temporelle de l'ondelette est liée à sa localisation fréquentielle. L'inverse est aussi vrai.

(c) Le *nombre de moments nuls* de l'ondelette est l'entier N tel que

$$\forall k = 1 \dots N-1, \quad \int t^k\, \psi(t)dt \;=\; 0 \Longleftrightarrow \frac{d^k\tilde{\psi}}{d\nu^k}(0) \;=\; 0 \qquad \text{(II.60)}$$

Les comportements polynômiaux réguliers d'ordre $p < N$ du processus sont alors "gommés" dans les détails $d_X(j,k)$. Notons aussi que N contrôle le comportement de $\tilde{\psi}(\nu)$ en zéro : plus N est grand, plus l'ondelette est oscillante dans le domaine temporel.

(d) Il peut s'avérer judicieux d'utiliser une ondelette à *support temporel ou spectral compact.* Cela permet de garantir la précision des calculs numériques effectifs (ex : Daubechies).

(e) *Le cône d'influence :* lorsqu'on va vers les grandes échelles, les coefficients sont influencés par une portion de plus en plus grande du signal. Par conséquent, il peut arriver qu'un coefficient soit non-nul à la verticale d'une valeur nulle du signal, et réciproquement. Ceci explique les structures en pointe couramment observées dans les représentations temps-échelle. Cette remarque nous servira lorsque nous voudrons séparer "fond turbulent" et "filaments" dans le signal de vitesse turbulent (chap. **V**,3.1).

(f) Lorsqu'on étudie un processus à accroissements stationnaires on obtient des coefficients ondelettes $T_X(a,.)$ stationnaires à chaque échelle [108]. Des moyennes temporelles pourront être utilisées.

(g) Une transformée en ondelettes continue est *redondante*, c'est-à-dire qu'elle contient plus de coefficients que nécessaire pour décrire l'ensemble de l'information disponible.

Cette redondance est caractérisée par le noyau reproduisant. Elle peut améliorer la lisibilité, mais risque d'alourdir voire de dégrader les estimations statistiques.

(h) Les ondelettes offrent une grande capacité d'adaptation à des situations particulières grâce à une grande variété de motifs ondelettes disponibles, éventuellement sur mesure.

(i) L'utilisation d'une normalisation en 1/a dans la définition (II.47) qui correspond à une conservation de la norme L^1 permet de retrouver directement un exposant d'irrégularité de Hölder en étudiant

$$\mathbb{E}[|\ T_X(a,t)\ |] \sim a^h \tag{II.61}$$

(j) Une transformée en ondelettes orthogonale permet une représentation de bonne lisibilité, sans termes d'interférence parasites.

(k) Il existe des transformées en ondelettes 2D voire 3D qui laissent entrevoir des perspectives de généralisation du formalisme utilisé ici [19, 56, 143].

Les coefficients d'ondelettes présentent encore bien d'autres propriétés qui ne sont pas au cœur de nos préoccupations actuelles. Nous utiliserons une transformée en ondelettes discrète et non continue. Si une transformée continue favorise une bonne lisibilité dans le plan temps-échelles , des estimations de bonne qualité nécessitent plutôt une décorrélation entre les coefficients associée à des algorithmes rapides. Les transformées en ondelettes discrètes décrites par l'analyse multirésolution répondent à ces critères.

2.4 Fonctions de partition ondelettes

Pratiquement tout ce que nous avons dit en évoquant les accroissements d'un processus (à accroissements stationnaires) se transpose aisément aux coefficients de la transformée en ondelettes en remplaçant $\delta X(\tau, t)$ par $T_X(a,t)$ ou $d_X(j,k)$. Par la suite nous ferons souvent appel aux fonctions de partition ou fonctions de structure ondelette :

$$S_q(j) = \frac{1}{n_j}\sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j,k)|^q \tag{II.62}$$

auxquelles nous adjoindrons les cumulants de $\ln|d_X(j,k)|$. Tous les détails concernant les estimations de ces quantités sont regroupés dans le Chapitre **IV**.

3 Cascades log-infiniment divisibles

Les cascades log-infiniment divisibles sont souvent évoquées et utilisées. Pourtant les détails de leur description sont disséminés dans différentes références [40, 41, 42, 43, 100, 142]. Nous proposons dans le paragraphe qui suit une présentation relativement formelle des cascades log-infiniment divisibles qui complète sur les aspects techniques la présentation du premier chapitre. Nous n'abordons pas ici les interprétations détaillées qui sont développées dans le chapitre **III**.

La présentation qui suit utilise les coefficients d'ondelettes mais peut être adaptée aux accroissements, à la dissipation, ou à toute autre quantité issue du processus et présentant une dépendance en l'échelle.

3.1 Du "multiscaling" aux cascades log-infiniment divisibles

Le formalisme des cascades log-infiniment divisibles permet de dépasser la propriété d'invariance d'échelle pour ne conserver qu'un mécanisme de passage d'une échelle à une autre, éventuellement non-invariant d'échelle. Ce mécanisme est associé à une structure multiplicative sous-jacente. La présence d'une structure multiplicative sous-jacente à un processus est en soi une propriété fort intéressante sur laquelle nous reviendrons en détail dans le chapitre **III**. Insistons seulement sur l'objectif d'une description de type cascade. Les cascades sont une forme de représentation permettant de décrire de façon "simple" la structure de corrélation "complexe" d'un processus.

Prenons pour point de départ le formalisme multifractal ou le "multiscaling". Nous utilisons désormais les coefficients d'ondelette $T_X(a,t)$ en lieu et place des accroissements[9] $\delta X(\tau,t)$. Tout ce que nous avons écrit en utilisant les accroissements dans la partie **II**.1 peut se transposer aux coefficients d'ondelette. La relation (II.45), traduite en termes ondelettes, peut s'interpréter comme une relation portant sur les fonctions génératrices des distributions P_a de $Y = \ln|T_X(a)|$. En effet,

$$\mathbb{E}[\,|T_X(a)|^q\,] \;=\; \int e^{q\ln|T_X(a)|}\, P_a(\ln|T_X|)\, d\ln|T_X| \;=\; \tilde{P}_a(q) \tag{II.63}$$

où

$$\tilde{P}_a(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{qy} P_a(y)\, dy \tag{II.64}$$

désigne la *fonction génératrice* (analogue à une transformée de Laplace bilatérale) de P_a (qui correspond à la *fonction caractéristique* si $q \to iq$). Ainsi (II.45) peut se réécrire

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{E}[\,|T_X(a_2)|^q\,] & \simeq & \underbrace{\exp\{-\zeta(q).[(-\ln a_2)-(-\ln a_1)]\}} & . & \mathbb{E}|T_X(a_1)|^q \\ \tilde{P}_{a_2}(q) & \simeq & \tilde{G}(q)^{[(-\ln a_2)-(-\ln a_1)]} & . & \tilde{P}_{a_1}(q) \end{array} \tag{II.65}$$

La dernière ligne peut s'interpréter comme la transformée de la convolution suivante dans l'espace "réel" :

$$\begin{array}{rcccl} P_{a_2}(\ln|T_X|) & = & \underbrace{G^{\star[(-\ln a_2)-(-\ln a_1)]}} & \star & P_{a_1}(\ln|T_X|) \\ P_{a_2}(\ln|T_X|) & = & G_{a_1,a_2} & \star & P_{a_1}(\ln|T_X|) \end{array} \tag{II.66}$$

où G_{a_1,a_2} contient toute l'information décrivant *l'évolution des fonctions de distribution* $P_a(\ln|T_X|)$ *à travers les échelles* a. La présence de la fonction $\ln a$ dans l'exposant de $\tilde{G}$

[9] Notons qu'il n'est pas évident que l'existence d'une cascade log-infiniment divisible pour les coefficients d'ondelette soit strictement équivalente à l'existence d'une cascade pour les accroissements.

traduit l'existence de lois de puissance, donc la propriété d'invariance d'échelle. Il s'agit maintenant de se donner un formalisme similaire en relachant la contrainte "invariance d'échelle". Pour cela, il suffit de remplacer $(-\ln a_2) - (-\ln a_1)$ par $n(a_2) - n(a_1)$ dans les relations (II.65) et (II.66), où n sera une fonction monotone quelconque. Ainsi, (II.66) devient :

$$P_{a_2}(\ln|T_X|) \ = \ G^{\star[n(a_2)-n(a_1)]} \ \star \ P_{a_1}(\ln|T_X|) \tag{II.67}$$

L'intérêt de la quantité G_{a_1,a_2} que nous désignerons par la suite sous le nom de *propagateur* a initialement été mis en évidence par B. Castaing *et al.* dans les références [43, 44].

Cas particuliers : Nous revenons sur deux cas particuliers de processus multifractals invariants d'échelle. A la lumière de ce paragraphe 3.1, nous interprétons les lois d'échelle comme la conséquence d'une cascade log-infiniment divisible, dont le propagateur est tel que :

$$G_{a_1,a_2} = G^{\star(\ln a_1 - \ln a_2)} \tag{II.68}$$

où $n(a_2) - n(a_1) = (-\ln a_2) - (-\ln a_1)$, rend compte de la propriété d'invariance d'échelle (lois de puissance en fonction de a). La profondeur de la cascade entre les échelles a_1 et a_2 est $\ln(a_1/a2)$.

(a) *Processus monofractals.* Le propagateur est alors trivial. Comme $\forall q,\ \zeta(q) = qH$, nous avons $\tilde{G}(q) = \exp(-qH)$ donc $G_{a_1,a_2} = \delta_{(-H).\ln(a_1/a_2)}$. La distribution P_{a_2} de $\ln|T_X(a_2)|$ s'obtient par simple translation ($\ln \mid T_X(a_1) \mid \to \ln \mid T_X(a_1) \mid -H\ln(a_1/a_2)$) de P_{a_1}, ce qui correspond à la multiplication des $T_X(a_1)$ par la constante $(a_2/a_1)^H$.

(b) *Processus multifractal à propagateur log-normal.* C'est le cas multifractal le plus facile à décrire. $\zeta(q) = H(q) = -\mu q - \sigma^2 q^2/2$, et nous avons $\tilde{G}(q) = \exp(\mu q + \sigma^2 q^2/2)$ donc $G_{a_1,a_2} = \mathcal{N}(\mu \ln(a_1/a_2), \sigma^2 \ln(a_1/a_2))$.

3.2 Cascades log-infiniment divisibles : définition et propriétés

3.2.1 Définition

De façon générale, une *cascade infiniment divisible* est formellement définie par un ensemble de fonctions densité de probabilité $\{P_s\}_{s\in[0,s_{max}]}$ ($s_{max} \le +\infty$), une fonction de distribution infiniment divisible[10] G et une fonction monotone $n(s)$ définie sur l'intervalle $[0, s_{max}]$ tels que :

$$\forall (s_1, s_2) \in [0,\ s_{max}]^2,\ n(s_1) \le n(s_2), \quad P_{s_2} = G^{\star[n(s_2)-n(s_1)]} \star P_{s_1} \tag{II.69}$$

$G_{s_1,s_2} = G^{\star[n(s_2)-n(s_1)]}$ est appelé *propagateur* de la cascade ; G est le *noyau* du propagateur ; n est la *profondeur* ou le *paramètre d'évolution* de la cascade.

La fonction $n(s)$ est croissante si la cascade a lieu de $s = 0$ vers $s = s_{max}$; $n(s)$ est décroissante si la cascade a lieu de $s = s_{max}$ vers $s = 0$. Par exemple, si on raisonne sur les échelles a, la fonction $n(a)$ sera décroissante ; si on définit $n(s)$ en utilisant $s = -\ln(a/a_0)$,

[10] Le chapitre III revient en détail sur les distributions infiniment divisibles et leurs principales propriétés.

la fonction $n(-\ln(a/a_0))$ est croissante. Comme le suggère la relation (II.66), la variable naturelle d'observation d'une cascade log-infiniment divisible à travers les échelles n'est pas l'échelle a (ou encore r ou $\tau\ldots$) elle-même, mais son logarithme. En effet, la situation de référence est l'invariance d'échelle, caractérisée par des lois de puissance. Dans un diagramme log-log, les lois de puissance deviennent des relations linéaires. C'est donc $s = -\ln(a/a_0)$, où a_0 est une échelle de référence, qui joue le rôle de variable naturelle. La courbure de la fonction $n(-\ln(a/a_0)$ sera alors une indication de l'écart à l'invariance d'échelle.

L'équation d'évolution (II.69) peut aussi se lire comme une équation de mélange. P_{s_2} est alors le résultat d'un mélange pondéré de versions dilatées de P_{s_1}. Dans le cas où G est la masse de Dirac δ, aucun mélange n'a lieu : P_{s_2} est simplement une version dilatée de P_{s_1}. Cette situation correspond à une forme d'auto-similarité. Par la suite, on parlera de *cascade log-infiniment divisible* pour une cascade infiniment divisible portant sur les distributions du *logarithme* de la valeur absolue de la quantité étudiée, par exemple $\ln \mid T_X(a,t) \mid$ ou $\ln \varepsilon_r(x)$.

3.2.2 Séparation des variables : H(q).n(a)

Soit $X(t)$ un processus dont les coefficients d'ondelette $T_X(a,t)$ vérifient une cascade log-infiniment divisible à travers les échelles a, décrite par $G^{\star[n(a_2)-n(a_1)]}$ où n est une fonction décroissante de a. Notons $\underline{P}_a$ la distribution des valeurs absolues des coefficients $|T_X(a,t)|$ et P_a la distribution de $Y = \ln|T_X|$. Soient a_1 et a_2 telles que $a_2 < a_1$, de sorte que $n(a_2) - n(a_1) \geq 0$. Nous pouvons écrire grâce à l'égalité (II.67) les relations

$$\begin{array}{ccccc} P_{a_2}(Y) & = & G^{\star[n(a_2)-n(a_1)]} & \star & P_{a_1}(Y) \\ \tilde{P}_{a_2}(q) & = & \tilde{G}(q)^{[n(a_2)-n(a_1)]} & . & \tilde{P}_{a_1}(q) \\ || & & || & & || \\ \mathbb{E}[|T_X(a_2)|^q] & = & \exp\{-H(q).[n(a_2)-n(a_1)]\} & . & \mathbb{E}[|T_X(a_1)|^q] \end{array} \tag{II.70}$$

d'où on déduit que la quantité

$$\frac{\mathbb{E}[|T_X(a_2)|^q]}{\exp\{-H(q).n(a_2)\}} = \frac{\mathbb{E}[|T_X(a_1)|^q]}{\exp\{-H(q).n(a_1)\}} \tag{II.71}$$

est indépendante de l'échelle et ne dépend que de q. L'ingrédient essentiel que nous avons conservé est la séparation entre les variables q et a dans la fonction $\tilde{G}_{a_1,a_2}(q)$:

$$\ln \tilde{G}_{a_1,a_2}(q) \;=\; -H(q).[n(a_2) - n(a_1)]. \tag{II.72}$$

C'est maintenant $H(q) = -\ln \tilde{G}(q)$ qui joue le rôle des exposants $\zeta(q)$. S'il y a invariance d'échelle, on a $n(a) = -\ln a$ et $H(q) = \zeta(q)$. En pratique, le logarithme de la dernière équation de (II.70) fait apparaître deux relations qui seront très utiles à la validation du modèle et à l'estimation de $H(q)$ et $n(a)$:

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{E}[\mid T_X(a) \mid^q] &= -H(q).n(a) + \kappa_q \\ &= \frac{H(q)}{H(p)}.\ln \mathbb{E}[\mid T_X(a) \mid^p] + \kappa_{p,q} \end{aligned} \tag{II.73}$$

En résumé, les quantités centrales autour desquelles nous allons devoir travailler sont :

- $\mathbf{H}(q) = -\ln \tilde{G}(q)$ qui décrit la fonction génératrice[11] du noyau de la cascade, c'est-à-dire la nature d'un pas élémentaire,

- $\mathbf{n}(a)$ qui rend compte de la profondeur de la cascade ; $dn/d\ln a$ s'interprète comme la vitesse de la cascade, et $d^2n/d(\ln a)^2$ comme son accélération. L'invariance d'échelle correspond au mouvement rectiligne uniforme.

Nous remarquons que *n est définie à une constante additive près*, qui définit l'origine de la cascade. La constante $\kappa_{p,q}$ dépend de cette convention. De plus, *les fonctions $H(q)$ et $n(a)$ sont définies à une constante multiplicative positive près* (on peut choisir H/α et αn). Nous avons toute latitude de choisir des *conventions* plus ou moins arbitraires.

3.2.3 Cumulants du log

On a aussi par définition des cumulants de la distribution G :

$$\ln \tilde{G}(q)^{n(a)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^G}{k!} q^k \right) n(a) \tag{II.74}$$

où

$$H(q) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^G}{k!} q^k. \tag{II.75}$$

Ainsi tous les cumulants $C_k^Y(a)$ de $Y = \ln \mid T_X(a) \mid$ doivent vérifier :

$$\begin{aligned} C_k^Y(a) &= C_k^G.n(a) + \gamma_k \\ &= \frac{C_k^G}{C_l^G}.C_l^Y(a) + \gamma_{l,k} \end{aligned} \tag{II.76}$$

Il est donc formellement équivalent de s'intéresser aux logarithmes des moments des coefficients $\mid T_X \mid$ ou aux cumulants de leur logarithme $\ln \mid T_X \mid$. On pourra consulter [95] à propos des cumulants et de leurs propriétés.

3.2.4 Interprétation multiplicative

Nous rappelons l'interprétation *multiplicative* déjà évoquée dans le premier chapitre, éq. (I.28) p. 27. Si on interprète G comme la distribution d'une variable aléatoire $\ln \widetilde{W}$

[11] Si le support de G s'avère borné inférieurement ou supérieurement on pourra aussi utiliser sa transformée de Laplace.

indépendante de $T_X(a,t)$, on déduit[12] de (II.70) :

$$\begin{array}{rcccc} P_{a_2}(Y) & = & G_{a_1,a_2} & \star & P_{a_1}(Y) \\ \Rightarrow \quad Y(a_2) & \stackrel{d}{=} & \tilde{\omega}_{a_1,a_2} & + & Y(a_1) \\ \Rightarrow \quad \ln|T_X(a_2)| & \stackrel{d}{=} & \ln \widetilde{W}_{a_1,a_2} & + & \ln|\, T_X(a_1)| \\ \Rightarrow \quad |T_X(a_2)| & \stackrel{d}{=} & \widetilde{W}_{a_1,a_2} & . & |T_X(a_1)| \end{array} \tag{II.77}$$

où $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité des distributions. Cette égalité traduit sous forme d'une addition de logarithmes une *structure multiplicative sous-jacente* du processus X. L'évolution des distributions de Y à travers les échelles a lieu "comme si" il existait une cascade multiplicative :

$$'' \quad |\, T_X(a_2,t)\,| \stackrel{d}{=} \widetilde{W}^{[n(a_2)-n(a_1)]} \,.\, |\, T_X(a_1,t)\,| \quad '' \tag{II.78}$$

La variable $\widetilde{W}$ (ou $\tilde{\omega}$) n'a pas forcément de signification concrète. Lorsque (II.77) est vérifiée par les distributions P_a de $Y(a,t)$ il n'est pas du tout évident qu'on puisse définir un processus réel[13] $W_{a_1,a_2}(t_1,t_2)$ associant $T_X(a_2,t_2)$ et $T_X(a_1,t_1)$ et tel que G_{a_1,a_2} soit la distribution de $\ln W_{a_1,a_2}$. Il n'est pas clair non plus qu'il soit fondé de chercher à définir un tel processus $W_{a_1,a_2}(t_1,t_2)$. Cependant, un nombre important de travaux en turbulence sont consacrés à l'étude de multiplicateurs (voir **I**.3) notamment pour la dissipation locale ε_r. Nous rappelons la définition (I.21) :

$$W_{r_1,r_2} = \frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} \tag{II.79}$$

En choisissant arbitrairement $t = t_1 = t_2$, on pourrait dans le même esprit définir des multiplicateurs issus de $T_X(a,t)$:

$$W_{a_1,a_2}(t) = \frac{|T_X(a_2,t)|}{|T_X(a_1,t)|}. \tag{II.80}$$

On espère ainsi décrire une évolution à travers les échelles à un instant t fixé. Comme la relation (II.77) ne porte que sur les distributions marginales et ne donne aucune information sur la dynamique, les instants t_1 et t_2 doivent être choisis a priori. Nous nous interrogerons[14] sur les relations pouvant exister entre W_{a_1,a_2}, multiplicateur "réel" défini comme un rapport de deux quantités physiques, et $\widetilde{W}^{[n(a_2)-n(a_1)]}$, multiplicateur "virtuel" défini par sa distribution (voir **III**.2). Cette question n'est qu'une facette d'un champ de réflexion beaucoup plus vaste : quel est précisément le lien entre cascades log-infiniment divisibles et cascades multiplicatives ?

---

[12] Comme précédemment, $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité des distributions, autrement dit une égalité en loi, et non une égalité entre processus.

[13] Réel signifie ici "ayant une existence physique".

[14] Si les accroissements d'un processus sont stationnaires indépendants alors leurs distributions sont infiniment divisibles [69] ; la réciproque est fausse (ex : le fBm).

Remarque : une cascade infiniment divisible décrit une évolution *additive* tandis qu'une cascade *log*-infiniment divisible décrit une évolution *multiplicative*. On ramène un problème de nature multiplicative à un problème de nature additive en travaillant sur le logarithme de la quantité étudiée. L'utilisation du logarithme nécessite la présence d'une valeur absolue si on ne distingue pas valeurs positives et négatives. Dans ce cas, une éventuelle dissymétrie (skewness) de l'évolution de $\underline{P}_a$ pourrait rester masquée. En pratique, une solution consiste à étudier séparément les valeurs positives et négatives, pour comparer ensuite leurs propagateurs s'ils existent. La propriété (II.70) exprimée pour $\underline{P}_a(T_X)$ s'écrit :

$$\underline{P}_{a_2}(T_X) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{a_1,a_2}(\xi)\, \underline{P}_{a_1}(e^{-\xi}\, T_X) e^{-\xi}\, d\xi \tag{II.81}$$

Il y a équivalence entre les deux écritures (sur $\underline{P}_a$ et P_a) lorsque $\underline{P}_a$ est symétrique ou lorsque les ailes droite ($T_X \geq 0$) et gauche ($T_X \leq 0$) de $\underline{P}_a$ suivent la même évolution à travers les échelles.

3.2.5 Près des cascades...

L'écriture $G_{a_1,a_2} = G^{\star[n(a_2)-n(a_1)]}$ traduit simplement le caractère *infiniment divisible* du propagateur G_{a_1,a_2}. L'évolution élémentaire décrite par G est répétée $n(a_2) - n(a_1)$ fois entre a_1 et a_2. Le paragraphe 1.2 du chapitre **III** rappelle les définitions et propriétés essentielles des distributions infiniment divisibles. La démarche est en quelque sorte à contre-courant de celle proposée par Yaglom [175] (voir **I**.3) pour essayer de justifier le propagateur log-normal de KO62. Yaglom considère qu'on obtient une description de la dissipation à l'échelle r grâce au produit d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes formant une variable log-normale grâce à un théorème de limite centrale[15]. L'argument repose sur le comportement asymptotique de la somme d'un grand nombre d'étapes. Ici au contraire, on peut considérer qu'on s'intéresse aux étapes intermédiaires d'un trajet global de taille finie (entre L et η) : aussi petite qu'elle soit, une étape intermédiaire se décrit comme une subdivision d'un trajet plus grand.

En turbulence, certaines approches proposent d'expliquer une dépendance non logarithmique en échelle par des effets de taille finie. Notamment B. Dubrulle [64, 65, 66] propose d'introduire la notion d'invariance d'échelle de taille finie, dans l'esprit des travaux de L. Nottale [122]. B. Dubrulle s'intéresse en particulier [64] au cas où l'évolution à travers les échelles peut être décrite grâce à une structure de groupe. Ce groupe doit agir dans une gamme d'échelle limitée. La quantité étudiée prend ses valeurs dans un domaine éventuellement borné. L'opération du groupe doit respecter ces contraintes. Ainsi, la fonction $n(a)$ définie plus haut ne pourrait prendre qu'un nombre fini ($= 9$) de formes analytiquement bien déterminées. Dans le cas où les bornes disparaissent, on retrouve l'invariance d'échelle habituelle et $n(a) \propto -\ln a/a_0$. La structure de groupe est très contraignante, ce qui explique le petit nombre de sous-cas envisageables. En particulier, une structure de groupe suppose l'existence d'un inverse pour chaque élément. Cette hypothèse semble contradictoire avec l'existence (en moyenne) d'une cascade d'énergie des grandes vers les

[15] Nous avons déjà vu (Ch. I) en quoi ce raisonnement était fragile.

petites échelles en turbulence 3D. Nous allons voir dans le chapitre suivant qu'une structure de semi-groupe (ne supposant donc pas l'existence d'un inverse) entretient des liens étroits avec les cascades log-infiniment divisibles.

Le propagateur G_{a_1,a_2} semble ne traduire que la propagation à travers les échelles d'une information superficielle concernant uniquement les distributions des coefficients d'ondelette (ou des accroissements). Quelle est la nature de l'information manquante? Quelle est son importance? Peut-on y avoir accès? En réalité, il s'agit déjà d'une contrainte assez forte sur la représentation temps-échelle (ou temps-fréquence) du processus. Pour un processus à accroissements stationnaires, caractériser les fonctions $H(q)$ et $n(a)$ revient à décrire les corrélations à 2 points à tous les ordres q. Il n'est par ailleurs pas si simple de concevoir un outil de synthèse de processus respectant une cascade log-infiniment divisible de fonctions $H(q)$ et $n(a)$ prescrites. Nous allons voir dans le chapitre **III** qu'il est possible d'extraire de ce formalisme une interprétation riche et instructive, notamment quant à la description de la cascade d'énergie en turbulence. Vérifier et caractériser la pertinence de ce formalisme nécessite des outils d'estimation bien maîtrisés. Le chapitre **IV** est consacré à l'étude des performances des estimateurs à base d'ondelettes que nous avons utilisés.

4 Conclusion

Nous avons d'abord rappelé les notions essentielles associées à la propriété d'invariance d'échelle : auto-similarité, dépendance à longue portée, régularité locale, formalisme multifractal et multiscaling.

Les ondelettes représentent l'outil idéal pour l'étude de processus vérifiant l'une et/ou l'autre de ces caractéristiques mises en évidence par des lois d'échelle (lois de puissance de l'échelle). Une brève présentation des transformées en ondelettes et de l'analyse multirésolution nous a permis d'en récapituler les principales qualités. La flexibilité dans le choix de l'ondelette mère et le caractère inversible de la transformation associées à une bonne localisation temps-fréquence des ondelettes permettent un travail chirurgical, directement dans le plan temps-fréquence (temps-échelle). Une transformée en ondelettes orthogonale assure une bonne lisibilité. Enfin, la transformée en ondelettes d'un processus à accroissements stationnaires est stationnaire à chaque échelle : on pourra en pratique remplacer les moyennes d'ensemble par des moyennes temporelles. Dorénavant, chaque fois que c'est possible, nous utilisons les formulations "ondelettes" des propriétés énoncées précédemment sur les accroissements.

Nous avons introduit formellement la notion de cascade log-infiniment divisible sur les coefficients d'ondelette d'un processus. Les cascades log-infiniment divisibles sont un prolongement et une généralisation naturelle du formalisme multifractal et du multiscaling. Les exposants $\zeta(q)$ et la fonction $\ln a$ (associée aux lois de puissance en échelle) sont remplacées par les fonctions $H(q)$, caractéristique du noyau du propagateur de la cascade, et $n(a)$, caractéristique du développement de la cascade à travers les échelles. Les cascades log-infiniment divisibles offrent une grande souplesse quant à la modélisation de données expérimentales, ainsi qu'une grande richesse dans leur interprétation comme nous le verrons dans les chapitres suivants.

Chapitre III
Cascades log-infiniment divisibles et turbulence

III. Cascades log-infiniment divisibles et turbulence

Nous venons de voir que les cascades log-infiniment divisibles permettent une extension de la notion d'invariance d'échelle. Elles offrent ainsi plus de souplesse quant à la modélisation de données expérimentales. Au début des années 90, B. Castaing [43] a pour la première fois signalé la pertinence de ce type d'approche en turbulence. En 1995, B. Castaing & B. Dubrulle [42] appelaient explicitement la communauté à utiliser les cascades log-infiniment divisibles pour étudier l'intermittence en turbulence. Le message de leur article est clair : selon eux, il faut travailler autour des fonctions $H(q)$ et $n(a)$ (voir Ch. **I** & **II**). Déjà en 1971, E. A. Novikov [123] évoquait des idées très similaires sans en avoir peut-être perçu à l'époque toute la richesse... Le but de ce chapitre est de jeter un peu de lumière sur la définition, la signification et l'interprétation des fonctions $H(q)$, associée au générateur de la cascade, et $n(a)$, associée à la profondeur de la cascade. La notion de *semi-groupe* est le fil rouge de notre présentation. La partie 1 met en évidence une correspondance forte entre distributions infiniment divisibles et semi-groupes continus. En turbulence, les approches utilisant les multiplicateurs (*breakdown coefficients*) font parfois référence aux cascades log-infiniment divisibles bien que le lien formel ne soit pas parfaitement établi ; la partie 2 discute cette question. Les cascades log-Poisson composées occupent une place vraiment à part parmi les cascades log-infiniment divisibles. Elles mènent à une vision originale de l'intermittence statistique en turbulence décrite dans la partie 3 grâce à une analogie avec la propagation d'un rayon lumineux dans la Voie Lactée [10]. Un processus de Markov homogène peut lui aussi être décrit par un semi-groupe (de Markov). La partie 4 s'efforce de clarifier les liens entre cascades log-infiniment divisibles et processus de Markov (équation de Fokker-Planck, équation de Langevin) grâce à la notion de générateur d'un semi-groupe.

1 Semi-groupes de convolution et distributions infiniment divisibles

Une description possible de l'intermittence en turbulence consiste à étudier l'évolution de distributions $P_s(Y)$ sous la forme (voir **I**.3 et **II**.3)

$$P_{s_2}(Y) = G_{s_1,s_2} \star P_{s_1}(Y) \tag{III.1}$$

où P_s désigne la marginale de $Y(s)$, G_{s_1,s_2} est appelé *propagateur* du processus, et $\star$ désigne la convolution. Pour fixer les idées, en turbulence, le paramètre d'évolution s sera en général associé à l'échelle r ou a. Le plus souvent, on s'intéresse soit à la dissipation locale, $Y(r) = \ln \varepsilon_r$, soit aux accroissements (longitudinaux ou transverses) de la vitesse, $Y(r) = \ln \mid \delta v_r \mid$, soit aux coefficients d'une transformée en ondelettes, $Y(a) = \ln \mid T_v(a) \mid$. Un cas particulier est le cas où G_{s_1,s_2} ne dépend que de $\Delta s = s_2 - s_1$. Il pourra suffire pour s'y ramener de choisir le paramètre d'évolution s de manière adéquate (par exemple $s = n(a) = -\ln(a/a_0)$ dans le cas d'un processus invariant d'échelle, voir **II**.3). L'équation (III.1) se réécrit dans ce cas

$$P_{s+\Delta s}(Y) = G_{\Delta s} \star P_s(Y) \tag{III.2}$$

Cette convolution peut aussi se lire comme l'action d'un opérateur associé à $G_{\Delta s}$ sur la distribution P_s dépendant du paramètre s pour obtenir $P_{s+\Delta s}$. Les semi-groupes de convolution donnent un cadre formel à cette lecture. Nous exposons brièvement leurs principales définitions et propriétés (§ 1.1). Nous verrons alors que le propagateur $G_{\Delta s}$ est associé à une distribution infiniment divisible (§ 1.2). Nous terminerons par une "exposition" de distributions infiniment divisibles proposées par divers auteurs en turbulence (§ 1.3). On pourra consulter l'ouvrage de Feller [69] pour plus de précision, et les références [33, 128] à propos de l'utilisation des semi-groupes pour l'étude des équations aux dérivées partielles en particulier.

1.1 Semi-groupes de convolution

1.1.1 Opérateur associé à une distribution

Définition. A toute distribution de probabilité G, on associe l'opérateur $\mathcal{G}$ de l'ensemble des fonctions continues de limites finies en $\pm\infty$ noté $\mathcal{C}[-\infty, +\infty]$ dans lui-même qui, à toute fonction p, associe

$$\mathcal{G}p(Y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} p(Y-u)\, G\{du\} \;=\; G \star p\,(Y) \tag{III.3}$$

où $\star$ désigne la convolution d'une fonction par une distribution. $\triangleleft$

Autant que possible, les distributions et opérateurs associés seront notés en lettres respectivement latines et germaniques. $G(Y)$ désigne la fonction densité de probabilité (si elle existe) associée à la distribution G ; on a alors $G\{dY\} = G(Y)\, dY$. Si G_1 et G_2 sont deux distributions, l'opération $\star$ est bien définie, et si les fonctions densités de probabilité existent

$$G_1 \star G_2(Y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(Y-u)\, G_1\{du\} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(Y-u)\, G_1(u)\, du \tag{III.4}$$

désigne la distribution de la somme de deux variables indépendantes de distributions G_1 et G_2.

1.1.2 Définition

Soit $\{G_s\}_{s\in[0,s_\infty]}$ ($s_\infty \leq \infty$) une famille de distributions de probabilité sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$G_{s_1+s_2} = G_{s_1} \star G_{s_2} \tag{III.5}$$

et soit $\{\mathcal{G}(s)\}_{s\in[0,s_\infty]}$ l'ensemble des opérateurs associés définis par (III.3) :

$$\mathcal{G}(s)p(Y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} p(Y-u)\, G_s\{du\} \;=\; G_s \star p\,(Y) \tag{III.6}$$

Les opérateurs $\mathcal{G}(s)$ vérifient la relation :

$$\mathcal{G}(s_1+s_2) = \mathcal{G}(s_1)\mathcal{G}(s_2) \tag{III.7}$$

Une famille d'opérateurs satisfaisant les propriétés ci-dessus constitue un *semi-groupe*. Ces opérateurs étant associés à une famille de distributions obéissant à la relation (III.5), la famille $\{\mathcal{G}(s)\}$ forme un *semi-groupe de convolution*. Ce n'est pas un groupe car en général $\mathcal{G}(s)$ n'a pas d'inverse.

1.1.3 Semi-groupe de convolution continu : générateur

Semi-groupe de convolution continu. Un semi-groupe de convolution $\{\mathcal{G}(s)\}$ est dit *continu* si :

$$\mathcal{G}(h) \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} \mathbb{I} \tag{III.8}$$

où $\mathbb{I}$ est l'opérateur identité. Dans ce cas on pose $\mathcal{G}(0) = \mathbb{I}$. $\triangleleft$

Notons que la définition n'évoque que la continuité en 0. La propriété (III.8) assure en fait la continuité en tout point :

$$\left(\mathcal{G}(s+h) - \mathcal{G}(s)\right) p \;=\; \left(\mathcal{G}(h) - \mathbb{I}\right)\, \mathcal{G}(s)\, p \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} \; 0 \tag{III.9}$$

Générateur d'un semi-groupe de convolution Un opérateur $\mathcal{U}$ engendre le semi-groupe de convolution $\mathcal{G}(s)$ si

$$\frac{\mathcal{G}(h) - \mathbb{I}}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \mathcal{U} \tag{III.10}$$

$\mathcal{U}$ est alors le *générateur* du semi-groupe de convolution $\{\mathcal{G}(s)\}$. $\triangleleft$

Théorème 1. (Corollaire du Lemme 1, Feller II, p.288 [69])
Deux semi-groupes de convolution ne peuvent avoir le même générateur. $\triangleleft$

Un semi-groupe de convolution possède un générateur si et seulement s'il est continu (voir [33, 69]). On a dans ce cas l'égalité suivante :

$$\frac{d}{ds}\mathcal{G}(s)p = \mathcal{U}\mathcal{G}(s)p \tag{III.11}$$

On peut formellement interpréter $\mathcal{U}$ comme la dérivée logarithmique de $\mathcal{G}(s)$ et écrire sous certaines hypothèses[1] :

$$\mathcal{G}(s) = \exp(s\mathcal{U}) \tag{III.12}$$

1.1.4 Exemples

(a) *Translations.* Soit une constante $c > 0$ et soit T_{cs} la distribution concentrée au point cs (Dirac), et $\mathcal{T}(s)$ l'opérateur associé. La propriété de semi-groupe $T_{cs_1} \star T_{cs_2} = T_{c(s_1+s_2)}$ est vérifiée et $\mathcal{T}(s)p(Y) = p(Y - cs)$. La fonction $\mathcal{T}(s)p$ est donc la version translatée de cs de la fonction p : $\{\mathcal{T}(s)\}$ constitue le *semi-groupe des translations.* Son générateur est

$$\mathcal{U} = -c\frac{d}{dY}. \tag{III.13}$$

Selon (III.12), une écriture imagée de ce semi-groupe serait $\mathcal{T}(s) = \exp\left(-cs\frac{d}{dY}\right)$.

(b) *Semi-groupe normal.* La famille d'opérateurs associée aux distributions normales $G_s = \mathcal{N}(0, \sigma^2 s)$ admet pour générateur

$$\mathcal{U} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dY^2} \tag{III.14}$$

ce qui correspond à un terme de diffusion.

(c) *Lien avec Fokker-Planck.* Considérons la famille de fonctions définie par $P_s(Y) = \mathcal{G}(s)P_0(Y)$. Pour P_0 suffisamment régulière,

$$\frac{\partial P_s}{\partial s} = \mathcal{U}P_s \tag{III.15}$$

Nous reconnaissons une équation de type Fokker-Planck, et P_s est l'unique solution satisfaisant la condition initiale $P_{s=0}(Y) = P_0(Y)$. Nous reviendrons plus loin sur le lien entre équation de Fokker-Planck et semi-groupes (partie 4).

(d) *Semi-groupes de Poisson composés.* Soit une distribution de Poisson composée (voir aussi 1.3 et 3)

$$G_s = e^{-\alpha s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha s)^k}{k!}F^{\star k}. \tag{III.16}$$

[1] Le théorème de la première formule exponentielle de Hille [33] délimite les conditions exactes dans lesquelles une telle écriture est bien définie. Dans tous les cas ce sera ici une très bonne image intuitive du sens de $\mathcal{U}$. Le théorème de Hille-Yosida détermine des conditions nécessaires et suffisantes sur un opérateur $\mathcal{U}$ pour qu'il soit le générateur d'un unique semi-groupe.

où F est une distribution quelconque. Il est aisé de prouver que (III.10) est vraie avec

$$\mathcal{U} = \alpha\,(\mathcal{F} - 1) \tag{III.17}$$

de sorte que nous avons (rigoureusement ici)

$$\mathcal{G}(s) = e^{\alpha s(\mathcal{F}-1)} \tag{III.18}$$

$\triangleleft$

Si l'évolution des distributions P_s est gouvernée par un semi-groupe de convolution, on pourra donc certainement écrire une équation aux dérivées partielles pour P_s. Réciproquement, chercher une équation aux dérivées partielles revient, sous les hypothèses du théorème de Hille-Yosida [33], à chercher un semi-groupe de convolution décrit dans ce cas par $G_{\Delta s}$. Ainsi, il existe un parallèle entre une description en termes d'opérateurs différentiels (voir partie 4) et une description en termes de propagateur et de distributions (ci-dessous). Le théorème suivant est une des clés de notre présentation. Il explicite un lien très fort entre les semi-groupes de convolution et la famille des distributions infiniment divisibles.

Théorème 2. (Feller II p. 294 [69])
Les classes de distributions de probabilité suivantes sont identiques :

(a) les distributions associées aux opérateurs $\mathcal{G}(s)$ des semi-groupes de convolution continus,

(b) les distributions infiniment divisibles et limites de ces distributions,

(c) les limites de suites de distributions de Poisson composées. $\triangleleft$

Ce théorème montre la correspondance entre le "monde" des semi-groupes de convolution et le "monde" des distributions infiniment divisibles. Il est ainsi équivalent de décrire les distributions P_s par un semi-groupe de convolution continu associé à une équation aux dérivées partielles (type Fokker-Planck, $\partial P_s/\partial s = \mathcal{U} P_s$) ou par une distribution infiniment divisible associée au propagateur ($P_{s+\Delta s} = G_{\Delta s} \star P_s$). Nous reviendrons en détail sur la lecture "Fokker-Planck" dans la partie 4. Nous reviendrons aussi sur le cas particulier des distributions de Poisson composées (voir 3). Nous présentons maintenant les distributions infiniment divisibles.

1.2 Distributions infiniment divisibles

Les distributions infiniment divisibles ont été introduites par B. de Finetti en 1929. Parmi les noms à retenir, on peut aussi noter A. Kolmogorov, P. Lévy, A. Khintchine... Ces distributions jouent manifestement un rôle central dans cette étude. Nous verrons que pratiquement tous les modèles proposés pour décrire l'intermittence statistique en turbulence par les "exposants des fonctions de structure" font appel aux distributions infiniment divisibles. Nous en rappelons ci-dessous quelques propriétés essentielles. Il ne s'agit pas de redémontrer des théorèmes, mais simplement de regrouper une sélection de propriétés dispersées dans les ouvrages de référence de Feller [70, 69] et Gnedenko & Kolmogorov [80]. Il existe en effet de multiples descriptions possibles des distributions infiniment divisibles et peu d'auteurs utilisent la même en turbulence. Chaque représentation fait apparaître une quantité qu'on peut voir comme une image du générateur $\mathcal{U}$ du semi-groupe de convolution associé à la distribution.

1.2.1 Définition

Définition 1 : Une distribution G est *infiniment divisible* si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une distribution G_n telle que $G = G_n^{n\star}$. Autrement dit, G est infiniment divisible si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ elle peut être représentée comme la distribution de la somme :

$$S_n = Y_{1,n} + ... + Y_{n,n}$$

de n variables aléatoires indépendantes de même distribution G_n. $\lhd$

Les distributions infiniment divisibles sont à l'évidence intimement liées aux processus à accroissements indépendants identiquement distribués. Notons de plus qu'une distribution de support fini non réduite à un point ne peut être infiniment divisible. La définition des distributions infiniment divisibles constitue en quelque sorte une version assouplie de la définition des lois stables. Les lois α-stables sont telles que la somme de n variables α-stables indépendantes identiquement distributées (i.i.d.) est encore α-stable. La distribution de la somme S_n de n variables Y_k i.i.d. de distribution infiniment divisible $P(Y_k)$ est encore infiniment divisible, mais pas nécessairement de même nature que $P(Y_k)$. L'ensemble des lois stables est inclus (strictement) dans l'ensemble des lois infiniment divisibles.

La fonction densité de probabilité de la *somme de deux variables aléatoires indépendantes* est donnée par la *convolution* des fonctions de distribution associées. Or la convolution dans l'espace réel devient multiplication dans l'espace de Fourier ou dans l'espace de Laplace. Les théorèmes décrivant les distributions infiniment divisibles utilisent par conséquent très souvent les fonctions caractéristiques, les transformées de Laplace ou les fonctions génératrices plutôt que les distributions elles-mêmes. Les trois paragraphes qui suivent (1.2.2 à 1.2.4) rappellent ces diverses descriptions.

1.2.2 Fonction caractéristique

Les transformées de Fourier des distributions infiniment divisibles de variance finie sont dues à Kolmogorov (1932), le cas général est dû à Lévy (1934). Les premières démonstrations analytiques sont dues à Feller et Khintchine (1937). La définition 1 se décline dans l'espace de Fourier en termes de fonctions caratéristiques. La *fonction caractéristique* $\phi(\nu)$ d'une distribution $G(y)$ est définie pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ par

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu y}\, G(y)\, dy \tag{III.19}$$

Définition 2 : Une distribution G de fonction caractéristique ϕ est *infiniment divisible* si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction caractéristique ϕ_n telle que $\phi = \phi_n^n$.$\lhd$

Théorème 3, [69], p.534. ϕ est la fonction caractéristique d'une distribution infiniment divisible G si et seulement s'il existe une mesure canonique[2] M et un réel μ tels que $\phi = e^{-\rho}$ où ρ est telle que :

$$\begin{cases} \rho(\nu) \; = \; \psi(\nu) + i\mu\nu \\ \psi(\nu) \; = \; \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{i\nu y} + i\nu \sin y}{y^2} M\{dy\} \end{cases} \tag{III.20}$$

$\lhd$

Cette représentation est équivalente à la représentation de Lévy et Khintchine (évoquée par She & Waymire [154]). Elle n'a cependant pas été utilisée sous cette forme en turbulence.

Théorème 4, [69], p.432. Si G est une distribution infiniment divisible de fonction caractéristique $\phi = e^{-\rho}$, alors pour tout $s > 0$, $\phi_s = e^{-s\rho}$ est la fonction caractéristique d'une distribution infiniment divisible G_s. $\lhd$

Si la distribution G_s décrit le semi-groupe de convolution continu $\{\mathcal{G}(s)\}$ associé à un générateur $\mathcal{U}$, la fonction $\rho(\nu)$ est une image du générateur $\mathcal{U}$: $\phi_s = e^{-s\rho}$ est analogue à "$\mathcal{G}(s) = e^{s\mathcal{U}}$". La fonction ρ engendre la famille de distributions infiniment divisibles $\{G_s\}$.

1.2.3 Transformée de Laplace

Définition. Si G est une distribution de probabilité de support $[0, +\infty[$, *la transformée de Laplace* $\bar{G}(q)$ de $G(y)$ est définie pour tout $q \geq 0$ par

$$\bar{G}(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qy}\, G(y)\, dy = \mathbb{E}[e^{-qy}] \tag{III.21}$$

$\lhd$

Par conséquent, dans tout ce paragraphe, les distributions considérées sont supposées définies sur $[0, +\infty[$. Si G a pour support $]-\infty, +\infty[$ on peut aussi définir (si elle existe) une transformée de Laplace *bilatérale*, analogue à la *fonction génératrice des moments* (cf 1.2.4),

$$\bar{G}_{bil}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy}\, G(y)\, dy \tag{III.22}$$

[2] On dit que M est une mesure canonique si $M\{I\} < \infty$ pour tout intervalle fini I et les intégrales $M^+(x) = \int_{x^-}^{+\infty} \frac{1}{y^2} M\{dy\}$ et $M^+(x) = \int_{-\infty}^{-x^+} \frac{1}{y^2} M\{dy\}$ convergent pour tout $x > 0$.

Théorème 5, [69], p.426 La fonction $\bar{G}$ est la transformée de Laplace d'une distribution infiniment divisible G sur $[0, +\infty[$ si et seulement si elle est de la forme $\bar{G} = e^{-\varphi}$ avec

$$\forall\, q \geq 0, \quad \varphi(q) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-qy}}{y} P\{dy\} \tag{III.23}$$

et P est une mesure telle que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y} P\{dy\} < \infty. \tag{III.24}$$

$\triangleleft$

Ce théorème est analogue au théorème de *Lévy-Baxter-Shapiro* ([69], p.539) qui se déduit du théorème 3 pour les distributions de variables positives (le théorème de *Lévy-Baxter-Shapiro* est utilisé par Novikov [124] qui propose différentes formes possibles pour P décrivant les distributions des *breakdown coefficients* de la dissipation turbulente).

Les *cumulants* C_k de la distribution G sont définis dans ce cas en prenant le logarithme de la transformée de Laplace :

$$\ln \mathbb{E}[e^{-qy}] = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{C_k}{k!} q^k \tag{III.25}$$

Enfin,les deux théorèmes suivants énoncent des propriétés fondamentales des distributions infiniment divisibles.

Théorème 4bis, [69], p.432. Si G est une distribution infiniment divisible de transformée de Laplace $\bar{G} = e^{-\varphi}$, alors pour tout $s > 0$, G_s ayant pour transformée $\bar{G}_s = e^{-s\varphi}$ est aussi une distribution infiniment divisible. $\triangleleft$

Nous voyons ici clairement que si la distribution G décrit le semi-groupe de convolution continu $\{\mathcal{G}(s)\}$ associé à un générateur $\mathcal{U}$, la fonction $\varphi(q)$ est une image du générateur $\mathcal{U}$: $\bar{G} = e^{-s\varphi}$ est analogue à "$\mathcal{G}(s) = e^{s\mathcal{U}}$". La fonction φ engendre la famille de distributions infiniment divisibles $\{G_s\}_{s \in \mathbb{R}^{+*}}$.

Le théorème suivant va nous permettre d'obtenir une information très intéressante quant aux signes des cumulants d'une distribution infiniment divisible sur $[0, +\infty[$.

Théorème 6, [69], p.425. La fonction $\bar{G}$ est la transformée de Laplace d'une distribution infiniment divisible sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\bar{G} = e^{-\varphi}$ où la dérivée H' est complètement monotone et $\varphi(0) = 0$. $\triangleleft$

Définition. Une fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ est *complètement monotone* si toutes ses dérivées existent et sont telles que

$$(-1)^k \varphi^{(k)}(q) \geq 0, \qquad q > 0. \tag{III.26}$$

◁

Si les cumulants de tous ordres existent, le théorème 6 nous informe que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} C_k \geq 0 & \text{si } G \text{ est définie sur } [0, +\infty[\\ (-1)^k C_k \geq 0 & \text{si } G \text{ est définie sur }]-\infty, 0] \end{cases} \tag{III.27}$$

Autrement dit, les cumulants d'une variable aléatoire *positive* de distribution infiniment divisible sont *positifs*; les cumulants d'une variable aléatoire négative sont de signes alternés, les cumulants d'ordre pair étant toujours positifs. Par conséquent, si $\bar{G} = e^{-\varphi}$ est la transformée de Laplace d'une distribution infiniment divisible sur $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$, alors $\bar{G}^{-1} = e^{+\varphi}$ *n'est pas* la transformée de Laplace d'une distribution infiniment divisible. Cette observation est à rapprocher de la structure de semi-groupe définie plus haut : un élément d'un semi-groupe n'admet pas nécessairement d'inverse.

1.2.4 Fonction génératrice : moments et cumulants.

Nous nous intéressons maintenant à des variables aléatoires dans $]-\infty, +\infty[$. On définit alors la fonction génératrice des moments. Nous utilisons souvent les moments (voir **II**.1.4 et **II**.3.2) et la fonction génératrice est la quantité naturelle associée. Nous reformulons ici la définition du **II**.1.4, éq.(II.64).

Définition. Si G a pour support $]-\infty, +\infty[$ on peut définir (si elle existe) la *fonction génératrice des moments* M_k, analogue à une transformée de Laplace bilatérale (cf 1.2.3),

$$\tilde{G}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{qy}\, G(y)\, dy = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \frac{q^k}{k!} \tag{III.28}$$

On a formellement $\tilde{G}(q) \equiv \bar{G}_{bil}(-q) \equiv \phi(-iq)$. ◁

Nous retrouvons pour la fonction génératrice des propriétés analogues à celles de la transformée de Laplace.

Théorème 4ter. Si G est une distribution infiniment divisible de fonction génératrice $\tilde{G} = e^{-H}$, alors pour tout $s > 0$, $\tilde{G}_s = e^{-sH}$ est aussi la fonction génératrice d'une distribution infiniment divisible G_s. ◁

Dans cette représentation, si les distributions G_s décrivent le semi-groupe de convolution continu $\{\mathcal{G}(s)\}$ associé à un générateur $\mathcal{U}$, la fonction $H(q)$ est une image du générateur $\mathcal{U}$: $\tilde{G} = e^{-sH}$ est analogue à "$\mathcal{G}(s) = e^{s\mathcal{U}}$".

Les cumulants d'une distribution G sont définis (s'ils existent) à partir de la fonction génératrice par :

$$\ln \tilde{G}(q) = \ln \mathbb{E}[e^{qy}] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_k}{k!}\, q^k \tag{III.29}$$

Cette définition est bien sûr cohérente avec la définition (III.25). Dans le cas général, nous ne disposons d'aucune information précise sur les signes des C_k. D'autre part, d'après (III.29), les cumulants C_k de G et $H(q)$ vérifient la relation :

$$H(q) \;=\; -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_k}{k!} q^k \tag{III.30}$$

Cette relation joue un rôle central dans l'étude des cascades log-infiniment divisibles. Grâce à l'égalité

$$\mathbb{E}[\mid T_X \mid^q] \;=\; \mathbb{E}\,[\, e^{q \ln |T_X|} \,] \;=\; \mathbb{E}\,[\, e^{qY} \,] \tag{III.31}$$

où $Y \;=\; \ln \mid T_X \mid$, il est formellement équivalent de s'intéresser aux logarithmes des moments absolus des coefficients d'ondelettes

$$\ln \mathbb{E}[\mid T_X(a) \mid^q] \;=\; -H(q)\, n(a) \;+\; Cte$$

ou de s'intéresser aux cumulants du logarithme des valeurs absolues $Y \;=\; \ln \mid T_X \mid$ (voir **II**.3.2) :

$$C_k^Y \;=\; C_k^G\, n(a) \;+\; Cte.$$

Les cumulants décrivent les ordres successifs du développement de $H(q)$ en puissances de q. Le propagateur est log-normal si et seulement si les cumulants C_k sont nuls pour tout $k \geq 3$. Vérifier que $C_3, C_4 \ldots$ sont nuls ou non nous renseigne quant au caractère log-normal ou non du propagateur. Des tentatives de réponses à cette question ont été menées en turbulence [20, 100]. En pratique, il faut pour cela disposer d'une statistique gigantesque à cause des difficultés d'estimation.

Nous disposons maintenant d'un panorama relativement complet des différentes représentations des distributions infiniment divisibles. Le tableau III.1 rappelle les exemples les plus courants de distributions infiniment divisibles et leurs représentations.

Le paragraphe qui suit rassemble quelques distributions infiniment divisibles qui ont été proposées en turbulence pour tenter de décrire l'intermittence statistique. De nombreux travaux, partant d'hypothèses et de présupposés divers et variés, aboutissent tous d'une façon ou d'une autre à une distribution infiniment divisible. C'est certainement l'idée d'une description à base de cascades multiplicatives qui provoque cette convergence des résultats.

1.3 Omniprésence des distributions infiniment divisibles en turbulence

Nous énumérons dans ce paragraphe quelques distributions infiniment divisibles qui ont été utilisées en turbulence. Elles se révèlent omniprésentes lorsqu'il s'agit de décrire l'intermittence statistique en turbulence, soit à travers l'évolution des distributions des coefficients d'ondelettes ou des accroissements de la vitesse à travers les échelles, soit à travers l'étude des multiplicateurs associés à la dissipation. Certaines ont eu plus de succès que d'autres –modèle log-normal de KO62, exposants log-Poisson de She & Lévêque– mais la discrimination entre différents modèles statistiques pour un phénomène aussi complexe

Distribution	$G(Y)$	$H(q) = \psi(-iq)$	$M\{dy\}$
Dirac	δ_μ	$-\mu q$	/
Gaussienne	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(Y-\mu)^2}{\sigma^2}}$	$-\mu q - \frac{\sigma^2 q^2}{2}$	$\sigma^2\delta_0(y-\mu)dy$
Poisson	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ Y = \mu + k\ln\beta$	$-\mu q + \lambda(1-\beta^q)$	$\delta_{\ln\beta}(y-\mu)dy$
Gamma	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}Y^{\alpha-1}e^{-\beta Y}$	$-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta+q}\right)$	$\alpha\beta^2 ye^{-\beta y}dy$
$\alpha -$ stables	...	$-\mu q - \sigma^\alpha q^\alpha\left[1 \mp \delta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]$	$\propto \lvert y\rvert^{2-\alpha}$
Poisson comp.	$e^{-\alpha s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha s)^k}{k!}F^{\star k}(Y)$	$\alpha s(1-\bar{F})$	$\alpha syF\{dy\}$

Tab. III.1: Tableau récapitulatif de quelques distributions infiniment divisibles communes et de leurs différentes descriptions. $G(Y)$ désigne la fonction densité de probabilité ; $\tilde{G}(q) = \exp(-H(q))$ est la fonction génératrice associée ; $M\{dy\}$ désigne la mesure définie par le théorème 3.

que la turbulence hydrodynamique semble rester inaccessible à l'expérience. A ce jour, aucun ne peut se prétendre supérieure aux autres. Chacun avance des arguments théoriques, expérimentaux ou heuristiques pour justifier sa valeur. Chaque fois, des exposants de lois d'échelle (relatives, pour une cascade log-infiniment divisible) sont prédits. Selon les cas, l'invariance d'échelle est supposée, ou remplacée par le cadre plus général des cascades log-infiniment divisibles.

Nous ne croyons pas qu'une bataille sur les valeurs numériques précises de ces exposants soit très enrichissante. Les barres d'erreur actuelles sur les estimations expérimentales sont telles qu'il est pratiquement impossible de privilégier telles ou telles valeurs des exposants. C'est dans la diversité et l'originalité des arguments statistiques ou physiques avancés par chaque auteur qu'il faut trouver la source de sa réflexion, en identifiant aussi clairement que possible les hypothèses et implications. Un point commun remarquable de pratiquement tous les raisonnement proposés est qu'ils font appel à la famille des distributions infiniment divisibles décrites en 1.2.

Dans ce qui suit, on s'intéresse soit à la distribution du logarithme Y d'une quantité dépendant de l'échelle, $Y = \ln\varepsilon_r$, $\ln \mid \delta v_r \mid$ ou $\ln \mid T_v(a) \mid$, soit à la distribution des multiplicateurs W définis par (I.21). Les modèles multiplicatifs sont en toile de fond. La notation G est réservée au noyau du propagateur d'une cascade log-infiniment divisible défini par (III.2). Pour éviter d'alourdir les notations de ce paragraphe, nous noterons indifféremment $\omega = \ln W$ la variable aléatoire associée à la distribution G ou au logarithme des multiplicateurs W. Rappelons enfin que l'hypothèse "de similarité améliorée" (*refined similarity hypothesis*) proposée par Kolmogorov [92] (voir **I**.3) suggère de relier les fluctuations des accroissements δv_r à celles de la dissipation ε_r grâce à :

$$\mathbb{E}[\mid \delta v_r \mid^q] \propto \mathbb{E}[\varepsilon_r^{q/3}] r^{q/3}. \tag{III.32}$$

L'utilisation de cette hypothèse permet de déduire des résultats sur les accroissements δv_r en étudiant la dissipation ε_r.

1.3.1 Dirac δ

La distribution δ_{y_0} concentrée au point y_0 est clairement infiniment divisible puisque $\delta_{y_0} = \delta_{(y_0/k)}^{\star k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (cf. le propagateur associé à l'invariance d'échelle, voir ex. **II**.3.2(a)). Elle serait associée au modèle K41 [91] qui prédit des distributions invariantes d'échelle. Pour les coefficients d'ondelette de la vitesse on aurait :

$$\begin{aligned} P_{a_2}(Y) &= \delta_{H.\ln(a_2/a_1)} \star P_{a_1}(Y) \\ \mathbb{E}[\mid T_v(a) \mid^q] &\sim a^{qH} \end{aligned} \tag{III.33}$$

avec $-C_1 = H = 1/3$. C'est aussi ce que vérifie un mouvement brownien fractionnaire (fBm) pour la même valeur de H. Ceci explique les comparaisons fréquentes entre un fBm pour $H = 1/3$ et un signal de vitesse turbulente [15, 76]. Dans cette situation, il n'y aurait pas d'intermittence : le passage d'une échelle à une autre se fait en quelque sorte de façon "déterministe". Pour qu'il y ait intermittence, il faut que le passage d'une échelle a_1 à une autre a_2 plus petite soit perturbé par des *fluctuations*. La distribution de Dirac est concentrée en un point $(a_2/a_1)^H$. La façon la plus simple d'introduire des fluctuations consiste à remplacer l'invariance d'échelle (le modèle K41) par une cascade log-normale (le modèle KO62 [92, 125]) en passant d'une distribution de Dirac à une gaussienne.

1.3.2 La loi normale $\mathcal{N}$

Si la mesure M du théorème 3 est la masse de Dirac $\sigma^2\delta_0$ concentrée à l'origine avec le poids σ^2 nous trouvons la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ associée à $\tilde{G}(q) = \exp(\sigma^2 q^2/2)$. C'est la distribution infiniment divisible non triviale ($\neq$ Dirac) la plus simple. La distribution log-normale joue un rôle tout particulier et sert de référence. C'est déjà la distribution suggérée par K62 [92] pour décrire la dissipation ε_r. $G(\omega)$ est alors associé à une loi normale :

$$G = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \tag{III.34}$$

de sorte que

$$\begin{cases} \tilde{G}(q) = \exp(\mu q + \dfrac{\sigma^2}{2} q^2) \\ H(q) = -\mu q - \dfrac{\sigma^2}{2} q^2 \qquad (H(q) \equiv \zeta(q) \text{ si lois d'échelles}) \end{cases} \tag{III.35}$$

μ (en général < 0) et σ^2 (>0) s'interprètent respectivement comme le cumulant d'ordre 1 (la moyenne) $C_1 = \mathbb{E}[\ln W]$ et le cumulant d'ordre 2 (la variance) $C_2 = \mathbb{E}[(\ln W - \mu)^2]$ de

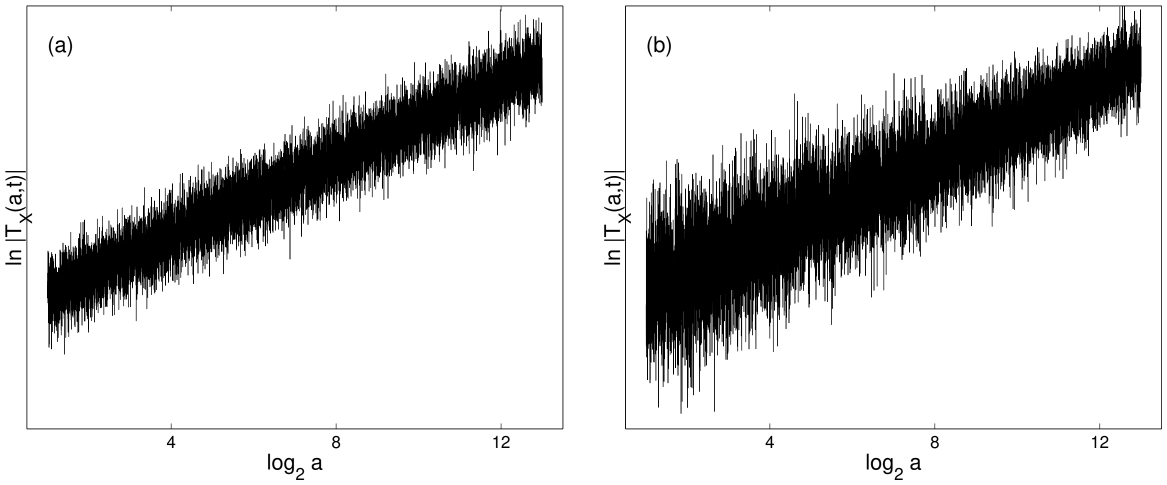

Fig. III.1: Fluctuations de $\ln \mid T_X(a,t) \mid$.**(a)** Pour un processus auto-similaire, les fluctuations sont les mêmes à toutes les échelles ; **(b)** pour une cascade log-normale, les fluctuations augmentent en allant vers les petites échelles.

$\ln W$. Le modèle K62 injecte les fluctuations log-normales du taux de dissipation local ε_r dans l'étude des accroissements longitudinaux :

$$\operatorname{var} \ln \varepsilon_r = \sigma^2_{\ln \varepsilon_r} \sim A(\mathbf{x},t) + 9k \ln(L/r) \tag{III.36}$$

La fonction $\ln(L/r)$ introduite à ce niveau respecte l'invariance d'échelle stricte. Grâce à la *refined similarity hypothesis*, Kolmogorov prédit alors pour la statistique des accroissements longitudinaux, des lois d'échelles dont les exposants sont donnés par $H(q)$ dans (III.35) avec $\mu = -1/3 - 3k/2$ et $\sigma^2 = k$; dans ce cadre, on a bien sûr $n(r) \sim \ln r$ (où n est la profondeur de la cascade log-infiniment divisible, définie en **II**.3). L'ordre de grandeur typique de k observé expérimentalement est $k \sim 0,02 - 0,03$.

En 1991, Vergassola & Frisch [170] s'interrogeaient sur les différences de comportement à travers les échelles des coefficients d'ondelette d'un mouvement brownien fractionnaire ($H = 1/3$) et d'un signal de vitesse turbulent. Dans les deux cas, on peut observer des fluctuations de ces coefficients autour de valeurs moyennes respectant des lois de puissance (approximatives pour la vitesse). C'est l'évolution de ces fluctuations à travers les échelles qui constitue la distinction essentielle entre un processus auto-similaire et un processus respectant une cascade log-normale. Dans un cas (auto-similaire), l'amplitude des fluctuations de $Y(a) = \ln \mid T_v(a) \mid$ est la même à toutes les échelles, tandis qu'elle varie dans le deuxième. C'est le cumulant d'ordre 2 du propagateur qui contrôle cette évolution : s'il est nul, il n'y a pas d'évolution (fig. III.1). Dans le cas d'un fBm (autosimilaire) on a :

$$\left\{ \begin{array}{r} \mathbb{E} \log_2 \mid d_X(j,k) \mid = Hj + Cte \\ \operatorname{var} \log_2 \mid d_X(j,k) \mid = Cte \end{array} \right. \tag{III.37}$$

donc $\log_2 \mid d_X(j,k) \mid$ fluctue autour de $Hj + Cte$, mais avec une variance constante. Dans le cas d'une cascade log-normale invariante d'échelle on a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\log_2 \mid d_X(j,k) \mid = -C_1 j + Cte \\ \operatorname{var}\log_2 \mid d_X(j,k) \mid = C_2 j + Cte \end{cases} \tag{III.38}$$

donc $\log_2 \mid d_X(j,k) \mid$ fluctue autour de $Hj + Cte$ $(a = 2^j)$, cette fois-ci avec une variance croissante lorsque j décroît.

Toutes les autres lois invoquées par la suite mettent en jeu une infinité de cumulants. La gaussienne est la seule distribution définie par un nombre fini de cumulants (C_1 et C_2). Une fois encore, la simplicité de la "courbe en cloche" fait tout son charme.

1.3.3 La loi de Poisson

La distribution de Poisson de paramètre λ notée $P_\lambda(k)$ a pour fonction génératrice $\tilde{P} = e^{-H}$ avec $H(q) = \lambda(1 - e^q)$. La distribution de la variable $-\gamma + k\ln\beta$, version dilatée et translatée de k, a pour fonction génératrice $\tilde{P} = e^{-H}$ avec :

$$H(q) = \gamma q + \lambda\left(1 - \beta^q\right) \tag{III.39}$$

Nous reconnaissons l'expression des exposants de She-Lévêque (1994) [153]. B. Dubrulle [63] et She & Waymire [154] ont montré indépendamment le lien entre le modèle de She-Lévêque et le propagateur log-Poisson. Le multiplicateur W associé reliant les échelles a_0 et $a < a_0$ s'écrit

$$W = e^{-\gamma\Delta n}\beta^k = W_0^{\Delta n}\,\beta^k \tag{III.40}$$

où $\Delta n = n(a) - n(a_0)$ $(= -\ln a/a_0$ dans le cas invariant d'échelle), et l'entier k obéit à une loi de Poisson de paramètre $\lambda\Delta n$,

$$P_{\lambda\Delta n}(k) = \frac{(\lambda\Delta n)^k}{k!}\,e^{-\lambda\Delta n}. \tag{III.41}$$

Le propagateur s'écrit :

$$G_{\Delta n}(\ln W) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\Delta n)^k}{k!}\,e^{-\lambda\Delta n}\,\underbrace{\delta\left(\ln W - k\ln\beta + \gamma\Delta n\right)}_{\delta\left(\ln\frac{W}{W_0^{\Delta n}} - k\ln\beta\right)} \tag{III.42}$$

Notons qu'il s'agit cette fois d'une loi de probabilité *discrète*. Ce caractère discret, évoquant un comportement quantique, n'a jamais été mis en évidence expérimentalement, sans qu'il s'agisse pour autant d'un argument rédhibitoire (voir le paragraphe 3 sur les lois de Poisson composées). Le modèle *Log-Poisson/She-Lévêque* portant sur la dissipation locale a remporté un vif succès car c'est le premier modèle statistique qui ait proposé une interprétation où des structures cohérentes singulières et leurs caractéristiques géométriques jouaient un rôle. En turbulence, les valeurs typiques des paramètres proposés par

She et Lévêque [153] en utilisant *the refined similarity hypothesis* de K62 (III.32) sont :

$$H(q) = \gamma q + \lambda\left(1-\beta^q\right)$$

avec

$$\begin{cases} \text{pour la dissipation} & \varepsilon_r & : \gamma = -\dfrac{2}{3}, \quad \lambda = 2, \quad \beta = \dfrac{2}{3} \\ \text{pour les accroissements} & \delta v_r & : \gamma' = \dfrac{1}{9}, \quad \lambda' = 2, \quad \beta' = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/3} \end{cases} \tag{III.43}$$

Le modèle de She-Lévêque [153, 154] propose une interprétation physique des paramètres γ (le taux de divergence de la structure la plus singulière) et β (facteur de modulation). De plus, les exposants $\zeta(q)$ (notés ici $H(q)$) prédits par ce modèle pour les lois d'échelle des accroissements δv_r dans la zone inertielle correspondent assez bien à ce qui est généralement observé expérimentalement ou numériquement. Certains arguments de ce modèle demeurent cependant assez obscurs dans leur signification et leur vérification expérimentale reste difficile.

Les modèles log normal et log-Poisson sont fréquemment cités et confrontés en turbulence. La confrontation de modèles statistiques est un exercice périlleux. Dans ce cas précis, il ne faut pas espérer distinguer les deux modèles simplement en comparant des exposants de fonctions de structure $\zeta(q)$ mesurés dans une zone inertielle ou même les valeurs de $H(q)$ si on utilise les cascades log-infiniment divisibles. La figure III.2 montre sur un seul graphique les prédictions d'un modèle log-Poisson (She-Lévêque) et d'un modèle log normal pour les accroissements longitudinaux de la vitesse (ainsi qu'un modèle de B. Castaing décrit plus loin). La discrimination nécessiterait de savoir estimé correctement les exposants $H(q)$ pour les ordres ≥ 15 avec une précision meilleure que 10%... Il faudrait bien sûr aussi être capable d'estimer ces barres d'erreurs ! Il est aujourd'hui généralement admis qu'il faut disposer d'un banc de données d'environ 100 millions de points pour espérer estimer proprement les ordres $q \lesssim 6$ ou 7...

1.3.4 Les lois Poisson composées

Par définition elles s'écrivent :

$$G_s = e^{-\alpha s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^k}{k!} F^{\star k} \tag{III.44}$$

où F est une distribution quelconque, $\alpha = Cte > 0$, et $s > 0$. On vérifie aisément que :

$$G_s \star G_t = G_{s+t}, \qquad \forall\ s,\ t > 0. \tag{III.45}$$

Lorsque $F = \delta_1$ on retrouve la loi de Poisson, où l'on note δ_{x_0} la distribution de Dirac concentrée en x_0. La fonction génératrice de G_s est $\tilde{G}_s = e^{-\alpha s[1-\tilde{F}]}$. L'équation (III.23) du théorème 5 est vraie pour une variable positive avec $P\{dy\} = syF\{dy\}$. Dans le cas d'une cascade log-infiniment divisible à travers les échelles, si le propagateur décrit par le couple (G, n) est associé à une distribution de Poisson composée, on pourra écrire :

$$G_{a_1,a_2}(\omega) = \underbrace{G^{\star[n(a_2)-n(a_1)]}}_{G_{\Delta n}}(\omega) = e^{-\Delta n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta n^k}{k!} F^{\star k}(\omega) \tag{III.46}$$

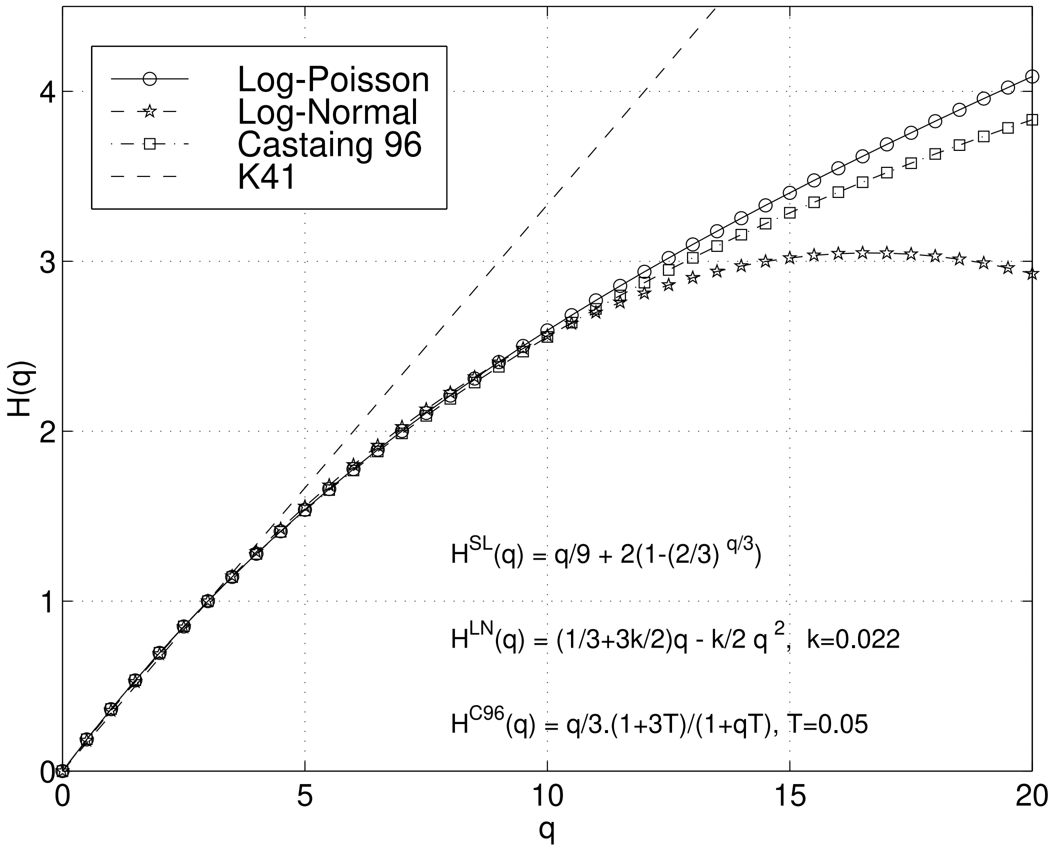

Fig. III.2: Comparaison entre les fonctions $H(q)$ pour un modèle log-normal [92], un modèle log-Poisson [153] (exposants de She-Lévêque) et le modèle ("température") proposé par B. Castaing [40] pour les accroissements longitudinaux de la vitesse. Aucune distinction n'est pratiquement possible en-dessous de l'ordre $q = 10$, sans compter les problèmes d'estimation associés !

où $\Delta n = n(a_2) - n(a_1)$ est la "distance moyenne" qui sépare les échelles a_1 et a_2. En effet, cette définition (III.46) peut s'interpréter en considérant le processus suivant. Soit $N(\Delta n)$ la variable d'un processus de Poisson avec $P_{\Delta n}\{N(\Delta n) = k\} = e^{-\Delta n}\Delta n^k/k!$. Pour chaque valeur de k, soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon F, indépendante de k. Alors (III.46) est la distribution de la somme aléatoire $\omega_1 + \ldots + \omega_{N(\Delta n)}$. En d'autres termes, au k-ième saut du processus de Poisson est associé un effet ω_k, et $\omega(\Delta n) - \omega(0)$ représente la somme cumulée de ces effets entre 0 et Δn.

Un cas particulier est celui où $F = \delta_{\ln\beta}$: on retrouve le fameux propagateur log-Poisson dont tous les pas sont identiques puisque F est concentrée en un point. She & Lévêque [153] travaillent sur la dissipation ε_r et proposent d'associer ce point à une structure singulière de l'écoulement. She & Waymire [154] se demandent si une classification des systèmes non linéaires dissipatifs est possible sur cette base. Chaque classe d'universalité serait définie par le nombre de structures singulières nécessaires à sa description. Il suffirait en quelque sorte de "compter les Dirac" (en supposant que F soit une somme de Dirac) pour établir une classification. Deux raisons au moins expliquent que cette idée ne semble pas avoir donné suite. La première est qu' un tel raisonnement suppose qu'il existe un nombre fini de structures singulières. Il n'est pas du tout évident qu'on doive se limiter à cette hypothèse. La deuxième raison est sans doute qu'il est extrêmement difficile d'étayer solidement une telle argumentation théorique par des observations expérimentales aussi avares en informations précises. La statistique est exigeante, la turbulence rétive...

Dans le prolongement de son article [39] de 1989, B. Castaing [40] a suivi en 1996 une démarche thermodynamique et introduit une quantité T qu'il nomme température pour décrire la statistique des accroissements de la vitesse. Le logarithme du propagateur $\ln G$ joue le rôle d'une entropie. B. Castaing aboutit ainsi à la proposition de $F(\omega) = e^{-\omega/T}/T$ pour décrire un propagateur G du type (III.46) dépendant de la température T. Le propagateur G proposé par B. Castaing dans [40] pour décrire les accroissements de vitesse δv_r entre la grande échelle L et une échelle r est associé à la distribution comportant un atome de poids e^{-s} en $\omega = \ln W = 0$ et de densité[3] :

$$G_{Lr}(\omega) = e^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k \mid \omega \mid^{k-1}}{k!(k-1)!T^k} e^{\omega/T}, \qquad \omega < 0, \tag{III.47}$$

où $s = n(r) - n(L)$ représente la profondeur de la cascade entre L et r. Grâce à (III.23) du théorème 5 page 68, on retrouve les exposants relatifs $H(q)/H(3)$ proposés par B. Castaing [40] :

$$\frac{H(q)}{H(3)} = \frac{\varphi(-q)}{\varphi(-3)} = \frac{q}{3}\frac{1+3T}{1+qT} \tag{III.48}$$

La figure III.2 compare cette proposition pour $T = 0,05$ aux modèles log normal et log-Poisson : les écarts sont très faibles... Remarquons que B. Castaing aurait pu choisir n'importe quelle distribution F respectant la condition

$$\frac{dF}{d\omega}(0) = \frac{1}{T}$$

[3] Une erreur de signe s'est malencontreusement glissée dans la formule donnée par B. Castaing dans [40]. Elle est corrigée ici.

Son choix a entre autres le mérite de correspondre à une situation où quelques calculs analytiques et surtout une interprétation parlante sont possibles. Nous reviendrons en détail sur certains points de cette approche dans la partie 3 de ce chapitre.

Enfin, il est amusant de noter que V. Yakhot [176] a obtenu en 1998 des exposants tout à fait semblables en prenant comme point de départ l'équation de Navier-Stokes et ses symétries : un point d'attaque radicalement différent ! Il apparaît pourtant dans son résultat un paramètre noté B. Si on pose $B = 1/T$, les prédictions de B. Castaing et de V. Yakhot s'accordent, du moins quant aux exposants $H(q)$. Tous deux considèrent que le choix $T = 0.05 \Leftrightarrow B = 20$ décrit bien les données expérimentales à haut Reynolds disponibles. Par ailleurs, Davoudi *et al.* [55] ont montré qu'on pouvait associer un développement de Kramers-Moyal à l'équation proposée par Yakhot.

1.3.5 Les lois α-stables

Les lois stables, dont la loi normale, sont infiniment divisibles. Dans le cas le plus simple, $\tilde{F}_\alpha(\nu) = e^{-\nu^\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, or

$$\nu^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\nu y}}{y^{\alpha+1}} dy \tag{III.49}$$

où l'on reconnaît la représentation (III.23) avec $P\{dy\} = dy/y^\alpha$, $X \in [0, +\infty[$ A noter que ces distributions n'admettent pas de variance finie, et éventuellement pas de moyenne (si $\alpha < 1$). Elles ont été utilisées en turbulence par Schertzer & Lovejoy [149].

1.3.6 Les lois gamma et exponentielle

La loi exponentielle d'espérance 1 a pour fonction caractéristique $\phi(\nu) = e^{-\psi(\nu)} = (1 - i\nu)^{-1}$. On peut montrer que :

$$\psi(\nu) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{i\nu y}}{y} e^{-y} \, dy \tag{III.50}$$

qui montre que cette distribution est infiniment divisible puisqu'elle correspond à la représentation du théorème 3 page 67 avec $M\{dy\} = ye^{-y}dy$ dans (III.20). Les lois *gamma* de densité $\gamma_s(y) = e^{-y}y^{s-1}/\Gamma(s)$ ont pour fonction caractéristique $e^{-s\psi}$ associée à la mesure sM. Elles sont donc aussi infiniment divisibles, grâce au théorème 4bis. Les lois gamma ont la propriété de former une famille stable par convolution :

$$\gamma_s \star \gamma_t = \gamma_{s+t} \tag{III.51}$$

Les distributions log-gamma ont été proposées par Saito [147] pour décrire l'intermittence des *breakdown coefficients* $W = e^\omega$ de la dissipation (voir **I**.3 et **III**.2), l'un des arguments centraux étant justement la stabilité de cette famille. Le résultat de Saito se réécrit avec nos notations,

$$G_{\Delta n}(\omega) = \gamma_{\alpha\Delta n, \beta}(\omega - \Delta n) = \frac{\beta^{\alpha\Delta n}}{\Gamma(\alpha\Delta n)} (\omega - \Delta n)^{\alpha\Delta n - 1} e^{-\beta(\omega - \Delta n)} \tag{III.52}$$

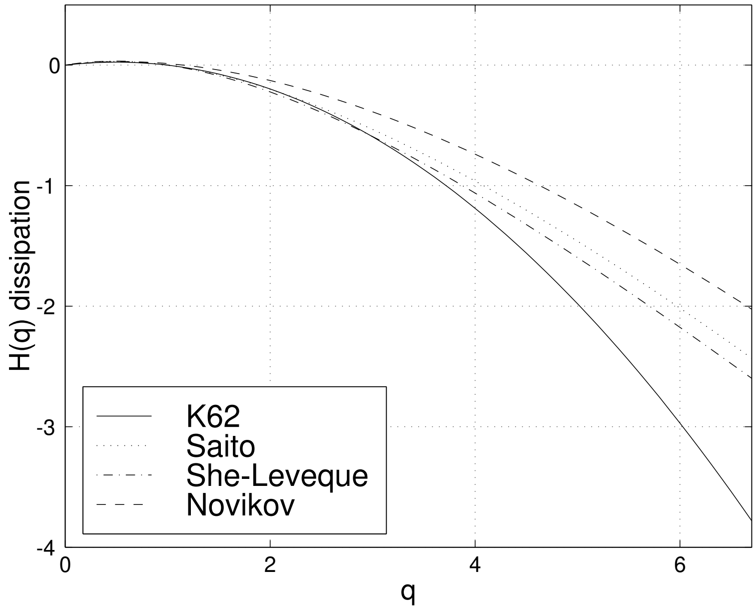

Fig. III.3: Exposants $H(q)$ proposés par K62 [92], Saito [147], She-Lévêque [153], et Pedrizzetti, Novikov & Praskovsky [124, 130]. La théorie K41 correspond à $H(q) = 0$. L'ordre q sur la dissipation correspond à l'ordre $3q$ sur les accroissements : les écarts à l'ordre 2 sur cette figure se comparent à ceux observés à l'ordre 6 de la figure III.2.

$$\Longrightarrow$$

$$H(q) = -q - \alpha \ln\left(\frac{\beta}{\beta + q}\right) \tag{III.53}$$

où α et β (> 0) sont déterminées *a posteriori*.

1.3.7 La représentation de Levy-Baxter-Shapiro

Pedrizzetti, Novikov & Praskovsky [124, 130] s'intéressent à la dissipation turbulente ε_r moyennée sur des boîtes de taille r. Ils définissent des *breakdown coefficients* notés $q_{r,l}$ correspondant aux multiplicateurs W_{r_1,r_2} définis plus haut (Ch. **I**). Pedrizzetti *et al.* proposent de décrire le logarithme de multiplicateurs adimensionnés $z_{r,l} = -\ln(rq_{r,l}/l) \in [0, +\infty[$ par des distributions infiniment divisibles. Ils se réfèrent au théorème de Lévy-Baxter-Shapiro et proposent un choix possible de la mesure P du théorème 5 page 67 :

$$P(y) = A(e^{-y/\sigma_1} - e^{-y/\sigma_2}), \qquad \sigma_1 > \sigma_2. \tag{III.54}$$

Les exposants des lois d'échelle pour les *breakdown coefficients* sont alors donnés par :

$$H(q) = q - A \ln\left(\frac{\sigma_1 q + 1}{\sigma_2 q + 1}\right) \tag{III.55}$$

Ce choix avait pour objectif d'améliorer les résultats de Saito [147], puisque pour les lois gamma on a dans cette représentation :

$$P(y) = A\, e^{-y/\sigma_1}, \qquad A > 0,\ \sigma_1 > 0. \tag{III.56}$$

La proposition de B. Castaing (III.47), transposée aux *breakdown coefficients*, correspondrait au choix :

$$P(y) = \frac{y}{T} e^{-y/T} \tag{III.57}$$

D'après le théorème 6 les cumulants C_k de $z_{r,l} = -\ln(rq_{r,l}/l)$ sont alors nécessairement positifs. En particulier,

$$\begin{cases} C_1 \ = \ \mu \ = \ -\mathbb{E}[\,\ln(rq_{r,l}/l)\,] \geq 0 \\ C_2 \ = \ \sigma^2 \ = \ \mathbb{E}\left[(\ln(rq_{r,l}/l) - \mu)^2\right] \geq 0 \\ C_3 \geq 0 \ \ldots \end{cases} \tag{III.58}$$

C'est une propriété remarquable. Si le formalisme des cascades log-infiniment divisibles s'avère pertinent (avec une borne supérieure sur les multiplicateurs) lors d'une analyse de données, nous disposons déjà d'une condition nécessaire sur les nombres C_k, en l'occurence leurs signes. Par conséquent, la cascade a lieu en sens unique : une cascade similaire remontant les échelles est exclue. En effet, les cumulants de la distribution infiniment divisible associée seraient nécessairement les $-C_k$ dont les signes ne peuvent pas être les mêmes[4] que ceux des C_k (sauf cas trivial).

Comme le démontre cette liste, pratiquement toutes les distributions infiniment divisibles admettant une description simple (souvent explicite) ont été proposées pour décrire l'intermittence de la vitesse ou de la dissipation en turbulence. Plutôt que de tenter (vainement) d'ajouter une proposition supplémentaire à cette liste, nous nous proposons d'essayer de comprendre ce que l'on peut espérer de ce type d'approche. Nous nous intéresserons notamment au cas particulier des propagateurs log-Poisson composés (§ 3) avant de considérer les liens entre approches markoviennes et cascades log-infiniment divisibles (§ 4).

2 Cascades log-infiniment divisibles et multiplicateurs

Nous revenons d'abord à la question du lien entre la variable aléatoire $\widetilde{W}$ associée au propagateur G d'une cascade log-infiniment divisible, le multiplicateur "virtuel", et le multiplicateur "réel" W défini par (II.80) (voir **I**.3 et **II**.3).

[4] Nous l'avions déjà signalé dans le paragraphe 1.2.3, théorème 6.

2.1 Multiplicateurs réels ou virtuels ?

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux processus stochastiques $Y(s)$ tels qu'il existe une distribution infiniment divisible G et une fonction croissante $n(s)$ telles que

$$P_{s+\Delta s}(Y) = G^{\star[n(s+\Delta s)-n(s)]} \star P_s(Y) \tag{III.59}$$

où P_s désigne la marginale de $Y(s)$, et $G^{\star n(s)}$ est appelé *propagateur* du processus –ce propagateur est naturellement associé à un semi-groupe de convolution. Nous mettons en évidence quelques propriétés de ces processus afin de préciser dans quelles conditions il existe un lien explicite entre le propagateur défini par le couple (G, n) et la distribution $P^{\omega}_{s,\Delta s}$ des accroissements ω de Y. Si on s'intéresse à l'évolution de $Y(a,t) = \ln \mid T_X(a,t) \mid$ (resp. $Y(r,t) = \ln \varepsilon_r(t)$), à t fixé, en fonction de l'échelle a (resp. r), cela revient à se poser la question du lien éventuel entre le multiplicateur "virtuel" $\widetilde{W}$ et le multiplicateur "réel" W. En effet, les accroissements de Y correspondent dans ce cas au logarithme des multiplicateurs "réels" : $\omega = \ln W$. Certaines des remarques qui suivent peuvent s'appliquer à un processus en temps (sans s'intéresser à sa structure dans un plan temps-échelle). Par souci de généralité, nous oublions donc momentanément les variables de temps t et d'échelle a. Nous raisonnons de façon générale sur un processus $Y(s)$, où s décrit ce que nous appelons la variable naturelle d'observation. Par exemple, on aura $s = -\ln a/a_0$ et $Y(s) = \ln \mid T_X(a, t = Cte) \mid$ pour une cascade log-infiniment divisible à travers les échelles a. La propriété d'invariance d'échelle se traduit alors par $n(s) = s$.

Ces processus sont par définition non stationnaires (sauf dans le cas trivial où il n'y a pas d'évolution). En se souvenant que la convolution "additionne les cumulants", notés C_k, nous déduisons[5] de (III.59)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad C^Y_k(s) = C^G_k . n(s) + C^Y_k(0) \tag{III.60}$$

En particulier, $C^Y_2(s) = \sigma^2_Y(s) \propto n(s)$ est croissante. La propriété (III.60) fournit un moyen pratique de vérifier l'existence et la forme de G et $n(s)$. La relation (III.60) n'est qu'une réécriture générale de (II.76).

On peut associer à un processus $Y(s)$, dont les accroissements $\omega(\Delta s, s)$ sont éventuellement non stationnaires et/ou non indépendants, un processus $\widetilde{Y}(u)$ à accroissements $\widetilde{\omega}(\Delta u)$ stationnaires indépendants. Il suffit pour cela d'introduire un *temps opérationnel* $u \propto n(s)$ permettant de "récupérer" la *stationnarité* des accroissements. Un simple changement d'échelle de temps bien choisi permet ainsi de ramener l'étude d'un processus quelconque à celle d'un processus à accroissements stationnaires. Il s'agit de suivre l'évolution du processus en accélérant ou ralentissant l'écoulement du temps de manière adaptée. Il y a par exemple beaucoup plus de coups de téléphone le jour que la nuit. On pourra donc étudier leur statistique en utilisant un temps opérationnel tel que le nombre de communications par unité de temps opérationnel demeure constant. Ainsi, à tout processus $Y(s)$ vérifiant (III.60) peut être associé un processus $\widetilde{Y}(u)$ tel que :

(a) $u = \alpha n(s), \quad \alpha > 0,$

[5] Nous supposons ici l'existence des cumulants de Y à tous les ordres.

(b) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad C_k^{\widetilde{Y}}(u) = \frac{C_k^G}{\alpha}.u + C_k^{\widetilde{Y}}(0),$

Pour alléger les écritures, nous choisissons systématiquement $\alpha = 1$, de sorte que $u = n(s)$. Nous complétons la définition du processus $\widetilde{Y}(u)$ par la propriété d'*indépendance* de ses accroissements $\widetilde{\omega}(\Delta u, u) = \widetilde{Y}(u + \Delta u) - \widetilde{Y}(u)$. Le processus $\widetilde{Y}(u)$ ainsi construit est un processus à *accroissements stationnaires indépendants* $\widetilde{\omega}(\Delta u)$. Leur distribution est donnée par $G^{\star\Delta u}$ décrite par ses cumulants $C_k^{\widetilde{\omega}}(\Delta u) = C_k^G.\Delta u$. Il faut bien sûr rapprocher la variable $\widetilde{\omega}$ définie ici de celle définie par (II.77). Le processus $\widetilde{Y}$ est le processus le plus "sympathique" respectant (III.59) que l'on sache définir à partir de Y. Décrire $\widetilde{Y}$ c'est décrire la cascade multiplicative *sous-jacente* à (III.59).

Dans le cas particulier où les accroissements de $Y(s)$ sont *stationnaires et indépendants*, on a $\widetilde{Y} \equiv Y$. Le propagateur $G^{\star\Delta s}$ décrit exactement les distributions des accroissements $\omega(\Delta s)$ du processus $Y(s)$. Il est d'ailleurs aisé de montrer la propriété :

P1. Si un processus Y vérifiant (III.59) est à accroissements stationnaires indépendants alors $n(s) \propto s$. $\triangleleft$

$\ulcorner$ En effet, les accroissements étant stationnaires et indépendants on a grâce à (III.60)

$$\begin{aligned} C_k^{\omega}(\Delta s, s) &= C_k^{\omega}(\Delta s) \\ &= C_k^Y(s + \Delta s) - C_k^Y(s) \\ &= C_k^G[n(s + \Delta s) - n(s)] \end{aligned} \tag{III.61}$$

d'où

$$C_k^{\omega}(\Delta s) = C_k^G[n(s + \Delta s) - n(s)] \Rightarrow n(s) \propto s. \tag{III.62}$$

$\lrcorner$

On en déduit par contraposée que si $n(s)$ est une fonction non linéaire de s alors les accroissements de Y ne peuvent pas être à la fois stationnaires et indépendants. Ce qui établit un lien entre *stationnarité / dépendance* des accroissements et *(non)-linéarité* de $n(s)$. Autrement dit, si on impose la stationnarité des accroissements, la non-linéarité de $n(s)$ sera l'image des dépendances des accroissements ; si on impose l'indépendance des accroissements, alors ils seront non stationnaires, et leur instationnarité sera décrite par $n(s)$. Lorsqu'on étudie $Y(a, t = Cte)$, avec $s = -\ln a/a_0$, la propriété $n(s) = s$ traduit l'invariance d'échelle. Un écart à l'invariance d'échelle, la courbure de $n(-\ln a/a_0)$, peut être dû à l'instationnarité et/ou aux corrélations des accroissements ω donc des multiplicateurs $W = e^{\omega}$ à travers les échelles.

Lorsque les accroissements ω sont *non stationnaires* et *indépendants*, il suffit d'adapter la vitesse d'écoulement du temps pour obtenir des accroissements stationnaires. L'indépendance des accroissements n'est pas affectée par cette opération. Le propagateur décrit encore les marginales des accroissements. On peut travailler sur le processus $\widetilde{Y}(u)$ tel que

$$\begin{aligned} u = n(s) &\neq s \\ \widetilde{\omega}(u_2 - u_1) &= \omega(s_1, s_2). \end{aligned} \tag{III.63}$$

Le "changement de référentiel" inverse $s = n^{-1}(u)$ permet ensuite de reformuler les propriétés observées sur $\widetilde{Y}(u)$ pour le processus $Y(s)$ et notamment sur les distributions

$$P^{\omega}_{s,\Delta s}(\omega) \;=\; P^{\widetilde{\omega}}_{n(s+\Delta s)-n(s)} \tag{III.64}$$

L'introduction du temps opérationnel $n(s)$ permet de travailler sur un processus à accroissements stationnaires indépendants. Le retour au processus lui-même est direct car la correspondance entre $\widetilde{Y}$ et Y reste simple. L'indépendance des accroissements est une propriété sympathique qui garantit qu'on puisse interpréter $G^{\star[n(s+\Delta s)-n(s)]}$ comme la distribution des accroissements ω de Y entre s et $s+\Delta s$.

Remarque : Le passage du temps "réel" s à un temps opérationnnel $u = n(s)$ correspond à une sorte de "changement de référentiel accéléré". En général $n(s)$ est une fonction non linéaire de s. On ne fait donc pas un changement de référentiel "galiléen" : le "référentiel" associé à u est *accéléré* par rapport à s :

$$\frac{d^2u}{ds^2} \neq 0.$$

Nous nous intéressons maintenant aux situations où les accroissements ne sont *pas indépendants*. Perd-on systématiquement l'interprétation du propagateur comme distribution des accroissements du processus ? Peut-on encore avoir $n(s) = s$ (invariance d'échelle) ? Le propagateur peut-il fournir une information ?

Dans le cas général où $Y(s)$ est à accroissements *non indépendants* et *(non) stationnaires*, associer à $Y(s)$ un processus $\widetilde{Y}(u)$ à accroissements stationnaires indépendants n'apporte pas grand chose. En effet, la correspondance entre $Y(s)$ et $\widetilde{Y}(u)$ n'est plus immédiate comme dans le cas précédent puisqu'on ne peut plus se contenter de décrire les distributions des accroissements. L'étude des accroissements $\omega(\Delta s, s)$ eux-mêmes semble inévitable pour extraire une information liée à leur structure de corrélation. Nous pouvons tout de même écrire les deux égalités suivantes portant sur les cumulants :

$$\begin{cases} C_k^Y(s+\Delta s) - C_k^Y(s) \;=\; C_k^G.\,[n(s+\Delta s) - n(s)] \\[2ex] C_k^Y(s+\Delta s) - C_k^Y(s) \;=\; C_k^{\omega}(\Delta s, s) \;+\; \rho_k(\Delta s, s) \end{cases} \tag{III.65}$$

où le terme $\rho_k(\Delta s, s)$ rend compte des corrélations à deux points à l'ordre k entre $Y(s)$ et $\omega(\Delta s)$. A l'ordre 1, $\rho_1 = 0$; à l'ordre 2, $\rho_2(\Delta s, s) = 2\mathbb{E}[Y(s)\omega(\Delta s)]$. De (III.65) on déduit

$$C_k^{\omega}(\Delta s, s) \;+\; \rho_k(\Delta s, s) \;=\; C_k^G.\,[n(s+\Delta s) - n(s)] \tag{III.66}$$

Nous voyons apparaître explicitement ici le lien entre $n(s)$ et la structure de corrélation[6] du processus $Y(s)$. Grâce à l'égalité (III.66) on obtient la propriété[7] :

P2. $$\forall\, k\ ,\rho_k(\Delta s, s) = C_k^G[n(s+\Delta s) - n(s) - n(\Delta s)]$$
$$\Leftrightarrow$$

[6] Peut-être faut-il penser les corrélations comme la conséquence d'effets de taille finie et voir ici une passerelle vers les travaux de B. Dubrulle ?

[7] Une telle structure de corrélation n'est pas sans rappeler celle du fBm (voir 2.2).

$$Y \text{ est à accroissements stationnaires et } \forall\, k\ , C_k^\omega(\Delta s) = C_k^G.n(\Delta s)\ \triangleleft$$

Dans ce cas précis, la structure de corrélation est telle qu'il existe un lien fort entre le propagateur G et la distribution des accroissements P^ω. Il s'agit d'une situation remarquable puisque :

$$\begin{cases} \text{a.} \quad P_{s+\Delta s}(Y) & = & G^{\star[n(s+\Delta s)-n(s)]} \star P_s(Y) \\ \text{b.} \quad P^\omega_{\Delta s} & = & G^{\star n(\Delta s)} \end{cases} \tag{III.67}$$

Si on conçoit momentanément le processus $Y(s)$ comme un processus en temps vérifiant la propriété **P2**, alors les comportements *en temps* (III.67a) et *en échelle* (III.67b) sont décrits par le même couple (G, n). C'est le cas du fBm (voir 2.2).

Enfin, dans le cas particulier où les accroissements sont *stationnaires* et de moyenne non nulle ($E[\omega(\Delta s)] \neq 0$), on obtient pour $k = 1$ dans (III.66),

$$\mathbb{E}[\,\omega(\Delta s)\,] \;=\; C_1^\omega(\Delta s) \;=\; C_1^G.\,[n(s+\Delta s) - n(s)] \tag{III.68}$$

car $\rho_1 = 0$. On en déduit la linéarité de $n(s) \propto s$ par le même argument que la propriété **P1** $\{n(s+\Delta s) - n(s) = f(\Delta s) \Rightarrow n(s) \propto s\}$. D'où la propriété :

P3. Y est à accroissements stationnaires et $E[\omega(\Delta s)] \neq 0 \implies n(s) \propto s.\triangleleft$

En résumé, regroupons d'abord les trois propriétés qui sont apparues lors de notre étude des processus $Y(s)$ vérifiant (III.59) :

P1. Y à accroissements stationnaires indépendants $\Longrightarrow n(s) \propto s$

P2. $\forall\, k\ , \rho_k(\Delta s, s) = C_k^G[n(s+\Delta s) - n(s) - n(\Delta s)]$

$\Leftrightarrow$

Y est à accroissements stationnaires et $\forall\, k\ , C_k^\omega(\Delta s) = C_k^G.n(\Delta s) \quad \triangleleft$

P3. Y à accroissements stationnaires et $\mathbb{E}\omega(\Delta s) \neq 0 \Longrightarrow n(s) \,\propto\, s$

Un point important qu'il faut d'abord signaler est l'absence d'équivalence entre la propriété d'invariance d'échelle ($n(s) = s$) et l'indépendance des multiplicateurs entre eux. Il règne un assez grand flou dans la littérature en turbulence à ce propos. Nous avons vu que les accroissements de $Y(a, t = Cte)$, soit les logarithmes des multiplicateurs $\omega = \ln W$, peuvent être corrélés sans interdire que $n(s) = s = -\ln a/a_0$. La propriété **P1** indique que si les multiplicateurs sont stationnaires (en échelle) et indépendants alors $n(s) = s = -\ln a/a_0$ et il y a invariance d'échelle. La réciproque est fausse. C'est aussi ce qu'indique la propriété **P3**.

Lorsque les accroissements ω sont *indépendants*, le propagateur $G^{\star[n(s+\Delta s)-n(s)]}$ n'est rien d'autre que la distribution $P^\omega_{s,\Delta s}$ des accroissements entre s et $s + \Delta s$. Appliquée au processus $Y(a, t = Cte)$ en échelle, cette remarque nous permettrait d'identifier le multiplicateur "virtuel" $\widetilde{W}$ et le multiplicateur "réel" W. C'est le seul cas où cette identité soit rigoureusement vraie.

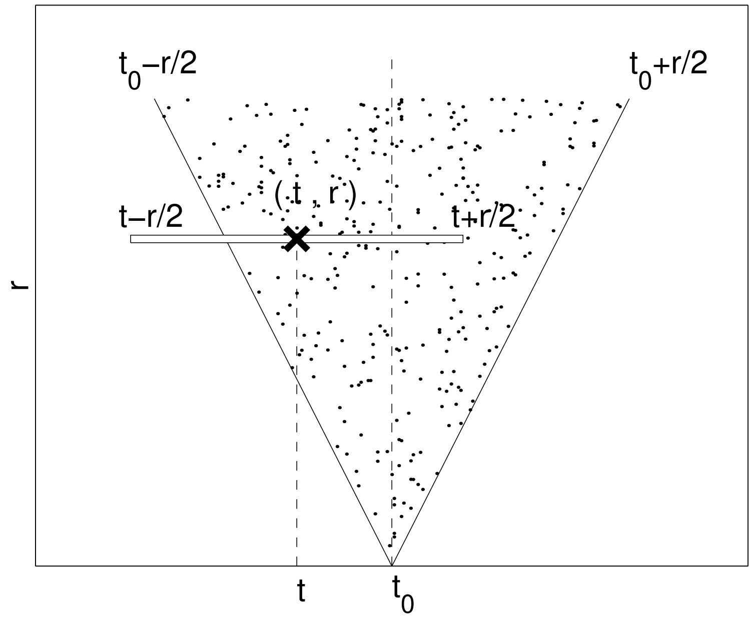

Fig. III.4: Cône du plan temps-échelle dont les points ont une influence sur la valeur du processus à l'instant t_0. Tous les points (t, r) tels que $t - r/2 \leq t_0 \leq t + r/2$ ont une influence potentielle sur l'instant t_0.

Cette constatation n'exclut pas pour autant l'existence éventuelle d'une cascade multiplicative "réelle" dans les autres cas. En effet, définir "comme d'habitude" les multiplicateurs par $W_{a_1,a_2}(t) = \mid T_X(a_2, t) \mid / \mid T_X(a_1, t) \mid$ (ou $\varepsilon_{r_2}/\varepsilon_{r_1}$) semble relever d'une intuition simpliste du plan temps-échelle. L'ensemble des valeurs $\varepsilon_r(t)$ (resp. $T_v(a, t)$) réparties dans le plan temps-échelle (t, r) (resp. (t, a)) constitue une représentation temps-échelle de la dissipation $\varepsilon(t)$ (resp. du signal de vitesse $v(t)$). S'intéresser au multiplicateurs tels qu'ils sont définis par (I.21) revient à ne s'intéresser qu'à une évolution en échelle à un instant fixé, sans considérer toute la dynamique, l'évolution temporelle. Relier deux coefficients par un seul multiplicateur serait pertinent si un point du plan temps-échelle $\varepsilon_r(t)$ n'était corrélé qu'aux points se trouvant au même instant à d'autres échelles $\varepsilon_{r'}(t)$. Or un point se trouvant en (t, r) (resp. (t, a)) dans le plan temps-échelle influence le signal typiquement au moins entre $t - r/2$ et $t + r/2$ (voir figure III.4). S'il existe une cascade multiplicative, elle n'a certainement pas une géométrie aussi simple que le suggère (I.21) et n'a certainement pas lieu le long d'une ligne à $t = Cte$. Une telle cascade relie nécessairement des points du plan temps-échelle se trouvant non pas sur une ligne mais au moins dans un domaine du plan temps-échelle, par exemple un cône renversé de sommet $(t, r = 0)$ et s'élargissant dans le sens des r (ou a) croissants. On ne peut donc espérer obtenir qu'une information très approximative d'une étude des multiplicateurs tels qu'ils sont définis par (I.21). La discussion autour de $\widetilde{W}$ et W n'est qu'une facette de la question ouverte et beaucoup plus difficile du lien entre cascades log-infiniment divisibles et cascades multiplicatives. La même question se pose pour les signaux multifractals.

Enfin, nous avons aussi observé que le processus Y peut avoir une structure de corré-

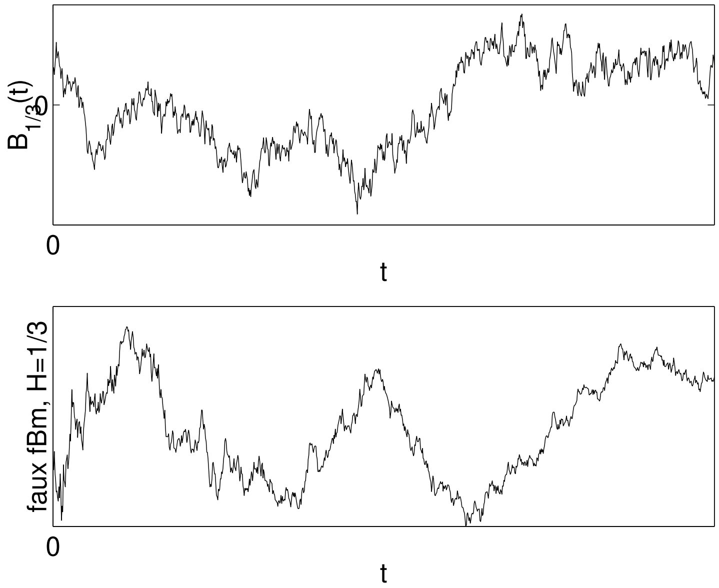

Fig. III.5: Comparaison entre un échantillon de fBm pour $H = 1/3$ et son analogue $\widetilde{B}_H$ (voir texte) à accroissements non stationnaires indépendants.

lation remarquable telle que $P^{\omega}_{s,\Delta s} = G^{\star n(\Delta s)}$. Il apparaît alors une correspondance forte entre l'évolution *en temps* ($t \equiv s$ ici) du processus, décrite par $G^{\star[n(s+\Delta s)-n(s)]}$, et l'évolution *en échelle* ($a = \tau = \Delta s$ ici) de ses accroissements, décrite par $G^{\star n(\Delta s)}$. C'est le cas des mouvements browniens fractionnaires qui sont de plus auto-similaires.

2.2 Quelques remarques à propos des fBm

Dans ce paragraphe en forme de parenthèse, nous nous intéressons aux mouvements browniens fractionnaires (fBm, voir **II**.1.1) à la lumière des observations que nous venons de faire. Il est facile de voir que les fBm notés $B_H(t)$ (voir **II**.1.1.1) vérifient tous (III.59) avec le même noyau $G_{\mathcal{N}}$ du propagateur défini par

$$G_{\mathcal{N}}(\widetilde{\omega}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2) \tag{III.69}$$

où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ désigne la loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2. En effet, les marginales P^H_t d'un fBm B_H sont données par

$$P^H_t = \mathcal{N}(0, \sigma^2 t^{2H}) \tag{III.70}$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall \quad 0 \leq t_1 \leq t_2, \quad P^H_{t_2}(Y) &= G_{\mathcal{N}}^{\star[t_2^{2H}-t_1^{2H}]} \star P^H_{t_1}(Y) \\ &= G_{\mathcal{N}}^{\star[n(t_2)-n(t_1)]} \star P^H_{t_1}(Y) \end{aligned} \tag{III.71}$$

en posant $n(t) = t^{2H}$. Tous les fBm (y-compris le mouvement brownien ordinaire, Bm) voient l'évolution temporelle de leurs distributions marginales décrite par le même noyau normal $G_{\mathcal{N}}$, et un temps opérationnel $u_H \equiv n(t) = t^{2H}$. Nous parlons ici de "cascades" infiniment divisibles *additives* selon un axe temporel[8]. Quant aux accroissements δB_H des fBm, les bruits gaussiens fractionnaires (fGn), ils sont stationnaires, mais dépendants (sinon d'après la propriété **P1** du 2.1 on aurait $t^{2H} = t$, ce qui correspond au cas $H = 1/2$ du Bm). La distribution des accroissements est gaussienne donnée par $\mathcal{N}(0, (\Delta t)^{2H} \equiv n(\Delta t)) \neq \mathcal{N}(0, \Delta(t^{2H}))$. Comme $\mathbb{E}\delta B_H(\Delta t) = 0$ et $\mathrm{cov}(B_H(t), \delta B_H(\Delta t)) = n(t + \Delta t) - n(t) - n(\Delta t)$, nous remarquons que B_H vérifie la propriété **P2**. En particulier, pour $k = 2$ on aura

$$C_2^{\delta B_H}(\Delta t) \;=\; \sigma^2 \;\Delta t^{2H} = \mathbb{E}[\,\delta B_H^2\,] \;=\; M_2. \tag{III.72}$$

Or, les accroissements étant gaussiens, tous les moments M_q d'ordre q sont proportionnels à $M_2^{q/2} \propto \Delta t^{qH}$. Le processus est auto-similaire. Mais ce raisonnement reste valable lorsqu'on remplace partout $t^{2H} = \exp(2H \ln t)$ par $\exp(2Hf(t))$, avec $f(t) \neq \ln t$. Les moments absolus M_q des accroissements vérifient alors :

$$M_q(\Delta t) \propto \exp(qH.f(\Delta t)) \tag{III.73}$$

Nous retrouvons l'"auto-similarité étendue" de Kaplan & Kuo (1994) [86] pour le mouvement brownien fractionnaire. Malheureusement, une fois encore le caractère gaussien du fBm joue à plein dans cette démarche. En définissant le comportement à l'ordre 2, on a déterminé en même temps tous les ordres supérieurs. Peut-être peut-on définir des processus non gaussiens du même type ?... peut-être en utilisant une cascade multiplicative ?... Le point crucial ici est le lien entre la structure de corrélation des mouvements browniens fractionnaires et leur caractère auto-similaire.

Regardons justement comment s'écrit la propriété d'auto-similarité d'un fBm pour le logarithme des coefficients d'ondelettes $Y(a, t) = \ln \mid T_{B_H}(a, t) \mid$:

$$\forall\; 0 \leq -\ln\frac{a_1}{a_0} \leq -\ln\frac{a_2}{a_0} \Leftrightarrow 0 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0, \quad P_{a_2}^Y = \delta_{-H\ln(a_1/a_2)} \star P_{a_1}^Y \tag{III.74}$$

Il s'agit là d'une cascade *log*-infiniment divisible (évoquant une structure *multiplicative*) selon un axe de type "échelle". Mais on voit bien qu'il s'agit d'une égalité en loi, et qu'on ne pourra pas mettre cette propriété en évidence à un instant donné pour une réalisation donnée. Plus précisément, on n'a pas, pour une trajectoire, $T_{B_H}(a_2, t) = (a_2/a_1)^H.T_{B_H}(a_1, t)$. Dans ce cas précis, nous comprenons bien qu'il faut distinguer la cascade log-infiniment divisible de la cascade multiplicative sous-jacente associée.

Enfin, notons qu'il est facile de construire un analogue (au sens où il aura les même marginales à tout instant) $\widetilde{B}_H$ d'un fBm B_H à accroissements indépendants mais non stationnaires. Il suffit pour cela d'utiliser la construction de $\widetilde{Y}$ décrite plus haut. Les distributions de ses accroissements entre s_1 et s_2 sont données par $\mathcal{N}(0, \sigma^2(s_2^{2H} - s_1^{2H}))$. Ils sont indépendants. En pratique, il est facile de tirer une réalisation des accroissements, puis de l'intégrer pour obtenir le processus $\widetilde{B}_H$. La figure III.5 montre un échantillon de B_H et de $\widetilde{B}_H$ pour $H = 1/3$. L'œil peut faire la différence en constatant qu'il y a moins de fluctuations aux petites échelles dans $\widetilde{B}_H$ que dans B_H (voir fig. III.5).

[8] Rappelons au passage cette propriété du fBm : si on échantillonne une réalisation d'un fBm $B_H(t)$ de façon irrégulière selon $t_k = i^{2H}.\Delta t_0,\; i \in \mathbb{N}$, on retrouve une trajectoire $B_{1/2}(k)$ du mouvement brownien standard [73].

2.3 Les multiplicateurs en turbulence

Si l'on tient compte des quelques précautions que nous venons d'évoquer, il peut demeurer intéressant de se donner une convention arbitraire sur les événements à associer (par exemple $t_1 = t_2$ ou $x_1 = x_2$ grâce à l'hypothèse de Taylor) pour étudier directement des multiplicateurs W_{r_1,r_2} aussi appelés *random multiplicative factors* [154] ou *breakdown coefficients* [123, 167, 124, 130, 147] dans la littérature. Nous rappelons leur définition (I.21) à partir de la dissipation locale ε_r issue d'un signal de vitesse d'anémomètre à fil chaud [123] :

$$W_{r_1,r_2} = \frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} \leq \frac{r_1}{r_2} \tag{III.75}$$

On s'intéresse alors à leurs distributions ainsi qu'à leurs corrélations éventuelles. Guidés par des motivations diverses, plusieurs travaux [29, 48, 50, 124, 130, 147, 159, 167] ont été menés dans cet esprit sur la dissipation locale ε_r. Les conséquences en sont en général déduites pour les accroissements de la vitesse δv_r en utilisant l'"hypothèse de similarité améliorée", ou *Kolmogorov's refined similarity hypothesis* (voir Ch. **I**).

La question de l'indépendance des multiplicateurs entre eux est essentielle du point de vue pratique (voir 2.1). L'étude expérimentale de la dépendance des multiplicateurs entre eux a montré que, aussi bien pour les accroissements de la vitesse que pour la dissipation, les corrélations semblent pouvoir être négligées, au moins en première approximation [29, 130, 159].

Si des corrélations significatives existent, elles contiennent certainement une information essentielle quant à la dynamique de l'écoulement étudié. Sreenivasan & Stolovitzky [159] ont proposé de tenir compte de cette dépendance en conditionnant la distribution des multiplicateurs au taux de dissipation local. Ils obtiennent un modèle de cascade corrélée. Leurs conclusions bien qu'intéressantes sont assez mitigées. Ils sont entre autre amenés à introduire un exposant α^* dont la signification reste obscure. La physique associée à ces modèles de cascade reste difficile à établir.

Une grande part des discussions porte aussi sur le lien entre *indépendance* des multiplicateurs et *invariance d'échelle*. On oublie trop souvent que l'indépendance des multiplicateurs entre eux est une condition *suffisante* mais en aucun cas nécessaire à l'invariance d'échelle. Il existe certainement une grande variété de cascades multiplicatives corrélées produisant l'invariance d'échelle, ou plus généralement une cascade log-infiniment divisible. En effet, l'invariance d'échelle n'est pas non plus *a priori* nécessaire à l'existence d'une cascade multiplicative. Beaucoup d'auteurs en turbulence mènent leur réflexion avec un *a priori* en faveur de l'hypothèse "invariance d'échelle", au point de tout faire pour la sauvegarder, même lorsque les données la contredisent. Pedrizzetti et al. [130] proposent d'adapter leur modèle aux données expérimentales en corrigeant des exposants en fonction de l'échelle (sic !) : la notion d'exposant de loi d'échelle dépendant de l'échelle a-t-elle vraiment un sens ? Dans ce cas précis, Pedrizzetti et al. font appel aux cascades log-infiniment divisibles, mais en postulant dès le départ $n(r) \propto \ln r$. Ils rencontrent alors des difficultés qu'ils contournent en préservant leur a priori pour l'invariance d'échelle. Or ce ne sont pas les exposants $\zeta(q) \equiv H(q)$ qui contiennent la dépendance en échelle. Par contre, en abandonnant l'invariance d'échelle pour décrire les résultats expérimentaux en utilisant

$n(r) \neq \ln r$, on peut très bien décrire de façon satisfaisante leurs observations expérimentales, sans sortir de façon un peu absurde du cadre formel mis en œuvre.

Mentionnons que nous avons proposé dans [48], en collaboration avec E. Lévêque, P. Abry et C. Baudet, une approche paramétrique des distributions des multiplicateurs pour la dissipation locale ε_r (à partir de mesures fil chaud dans un jet). Nous joignons (annexe A) une copie de notre communication à ETC8 Barcelone 2000 [48]. Nous avons choisi de modéliser les distributions des multiplicateurs définis pour la dissipation par une distribution de Poisson "généralisée", définie par 3 paramètres. Il s'agissait de s'intéresser aux multiplicateurs, sans chercher à priori des distributions infiniment divisibles. Or les résultats ont montré une incohérence avec l'hypothèse d'une cascade infiniment divisible, tout en mettant en évidence de magnifiques lois d'échelles entre $\sim L$ et $\sim \eta$ pour les paramètres du modèle ! Ces observations ne sont pas bien comprises, et doivent faire l'objet de réflexions complémentaires.

L'approche de Friedrich & Peinke faisant appel à l'équation de Fokker-Planck [74, 75] ne fait pas intervenir les distributions de multiplicateurs mais des probabilités conditionnelles telles que

$$P(\tilde{v}_2, \lambda_2) = \int d\tilde{v}_1 \, P(\tilde{v}_2, \lambda_2 \mid \tilde{v}_1, \lambda_1) \, P(\tilde{v}_1, \lambda_1) \tag{III.76}$$

où $\tilde{v}$ désigne un accroissement de vitesse adimensionné et $\lambda = \ln(L_{ref}/r)$ est une échelle logarithmique. Friedrich & Peinke espèrent ainsi introduire moins d'a priori dans leur approche. Même si leurs observations ne s'y opposeraient pas forcément, Friedrich & Peinke ne raisonnent pas en termes de processus multiplicatif. Les équations (III.2) et (III.76) n'ont pas la même signification : le propagateur G_{a_1,a_2} seul ne dit rien quant à la structure de dépendance ; tandis que la probabilité conditionnelle $P(\tilde{v}_2, \lambda_2 \mid \tilde{v}_1, \lambda_1)$ peut contenir de l'information liée aux éventuelles corrélations. Nous reviendrons sur la distinction entre ces probabilités conditionnelles et les distributions d'éventuels multiplicateurs (§ 4.1.2), qui est aussi évoquée dans [109]. Marcq & Naert [107], qui s'inspirent de leurs travaux, tentent eux d'écrire une équation de Langevin cette fois-ci pour le logarithme de la dissipation locale $\ln \varepsilon_r$. Une description additive pour $\ln \varepsilon_r$ équivaut alors à une description multiplicative pour ε_r. Nous revenons plus précisément sur les liens entre équation de Fokker-Planck, équation de Langevin et cascades multiplicatives dans la partie 4.

3 Etude du propagateur log-Poisson composé

Le théorème 2 du paragraphe 1.1.4 nous avait déjà signalé le rôle particulier joué par les lois de Poisson composées au sein des distributions infiniment divisibles. Nous avons vu au paragraphe 1.3 qu'elles avaient déjà été évoquées en turbulence par plusieurs auteurs. Nous étudions maintenant plus en détail la forme de ces distributions Poisson composées qui reçoivent une interprétation très parlante. Elles constituent à notre sens un excellent support pour l'intuition, et méritent ce traitement de faveur.

3.1 Interprétation

Par définition les lois de Poisson composées s'écrivent :

$$G_s = e^{-\alpha s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^k}{k!} F^{\star k} \tag{III.77}$$

où F est une distribution quelconque, $s \in \mathbb{R}^+$. α est une constante définissant l'unité de mesure de s. On vérifie aisément que :

$$G_s \star G_t = G_{s+t}, \qquad \forall\ s,\ t > 0. \tag{III.78}$$

Lorsque $F = \delta_1$ on retrouve la loi de Poisson. La transformée de Laplace de G_s est $\bar{G}_s = e^{-\alpha s(1-\bar{F})}$ et (III.23) est vraie pour une variable positive avec $P\{dX\} = \alpha s X F\{dX\}$. Comme nous l'avons déjà remarqué dans (III.17), le générateur $\mathcal{U}$ du semi-groupe de convolution associé se déduit de l'opérateur $\mathcal{F}$ associé à F :

$$\mathcal{U} = \alpha\,(\mathcal{F} - 1) \tag{III.79}$$

La fonction $H(q)$ se trouve ainsi éclairée sous un nouveau jour :

$$H(q) \ = \ \alpha[1 - \tilde{F}(q)] \tag{III.80}$$

H décrit ainsi le pas élémentaire de la cascade puisque c'est une image de la distribution F. C'est une remarque intéressante du point de vue théorique surtout. En pratique, il y a peu d'espoir de tirer des informations quantitatives très précises sur F de l'estimation de $H(q)$ étant donné les précisions expérimentalement ou numériquement accessibles.

Dans le cas d'une cascade log-infiniment divisible à travers les échelles, si le propagateur décrit par le couple (G, n) est associé à une distribution de Poisson composée, on pourra écrire :

$$G_{a_1,a_2} = \underbrace{G^{\star[n(a_2)-n(a_1)]}}_{G_{\Delta n}} = e^{-\Delta n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta n^k}{k!} F^{\star k} \tag{III.81}$$

où $\Delta n = n(a_2) - n(a_1)$ est la "distance" moyenne qui sépare les échelles a_1 et a_2. Présentée ainsi, la fonction $n(a)$ représente un nombre moyen de pas de la cascade, une profondeur moyenne. Une échelle est atteinte après un nombre de pas aléatoire k. Selon le lieu et l'instant, le nombre de pas entre deux échelles peut varier : il est distribué selon une loi de Poisson[9] de paramètre Δn. De même, le noyau G ne décrit qu'une évolution moyenne. La nature d'un pas élémentaire est déterminée par la distribution $F(\omega) = W\underline{F}(W)$. On peut imaginer qu'à chaque pas, on tire au sort un multiplicateur W dont le logarithme ω est distribué selon F. De cette façon chaque pas est aléatoire, et le nombre de pas k lui-même est aléatoire, distribué par une loi de Poisson. Si l'on cherche à imaginer une cascade multiplicative associée à ce comportement, il semble qu'il faudrait abandonner l'idée d'une

[9] Il est possible de généraliser cette écriture à d'autres distributions que la loi de Poisson, y compris pour des distributions à support continu. Toutes les distributions infiniment divisibles conviennent [69], p.335.

géométrie arborescente déterminée de la cascade puisqu'elle doit pouvoir évoluer dans le temps et dans l'espace. Il ne faut sans doute pas raisonner sur un arbre fixé (par exemple l'arbre dyadique), mais imaginer un arbre aléatoire. Remarquons qu'il n'y a dès lors pratiquement aucun espoir de détecter le caractère discret ou non de la distribution du nombre de pas de la cascade. Un tel mécanisme de cascade gouverné par le hasard paraît être un bon candidat pour décrire certains aspects d'un phénomène aussi complexe et désordonné que la turbulence.

Pour rendre plus palpable cette interprétation, nous considérons maintenant un problème sans rapport avec la turbulence. Nous exploiterons ensuite ce modèle pour développer une analogie entre la propagation de l'énergie d'un rayon lumineux dans un espace peuplé de nuages absorbants et la cascade d'énergie à travers les échelles en turbulence (3.2). Le point de départ des observations qui suivent est une remarque de Feller [69] concernant un modèle de propagation d'un rayon lumineux dans le milieux interstellaire. Il s'agit d'un modèle[10] proposé par V.A. Ambarzumian [10] en 1944 dans un article intitulé *On the theory of brightness fluctuations in the Milky Way.*

Dans ce modèle, la variable r représente une distance et $X(r)$ est l'intensité d'un rayon lumineux voyageant dans l'espace. On suppose que chaque élément de volume rayonne à taux constant de sorte que $X(r)$ croît linéairement ($\propto cr$). Mais l'espace contient aussi des nuages sombres absorbants que nous supposons tous optiquement identiques et distribués de façon homogène isotrope. Soit α/σ le nombre de nuages par unité de volume ; α se lit comme un nombre moyen de nuages par unité de longueur, et σ comme la section efficace des nuages. Lorsqu'il traverse un nuage, un rayon lumineux ne conserve qu'une fraction aléatoire $W \in [0,\ 1]$ de l'énergie qu'il transporte. Soient $F(\omega)$ et $\underline{F}(W)$ les densités de probabilité respectives de $\omega = \ln W$ et W. Examinons l'évolution de l'énergie d'un rayon lumineux ayant parcouru la distance r. D'une part, elle augmente de cr à cause du rayonnement homogène isotrope constant en volume. Cette variation linéaire ne pose pas de problème, et un simple changement de variable $X \to X - cr$ permettra de se concentrer sur le terme de fluctuation aléatoire. D'autre part, sur cette distance r, le rayon lumineux traverse k nuages absorbants, où k est distribué selon une loi de Poisson de paramètre αr :

$$P_{\alpha r}(k) = e^{-\alpha r}\frac{(\alpha r)^k}{k!} \tag{III.82}$$

Par conséquent, le rayon lumineux subit une succession de k atténuations de facteurs W_i, $1 \leq i \leq k$, identiquement distribués selon $\underline{F}$. L'atténuation totale vaut donc

$$W = W_1 \times \ldots \times W_k \tag{III.83}$$

ce qui se réécrit en prenant le logarithme de cette relation :

$$\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_k. \tag{III.84}$$

Nous en déduisons que la distribution de $\omega = \ln W$ est $F^{\star k}$ (pour chaque valeur de k). En moyennant ce résultat sur toutes les valeurs de k possibles, nous obtenons la distribution

[10] Le même type de modèle a été proposé par Landau pour étudier l'énergie de particules se déplaçant dans un milieu où elle subissent des collisions [96].

de ω, facteur d'atténuation logarithmique[11] de l'énergie du rayon lumineux sur la distance r :

$$G_r(\omega) = e^{-\alpha r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha r)^k}{k!} F^{\star k}. \tag{III.85}$$

Nous reconnaissons une loi de Poisson composée du type (III.77).

Proposer un parallèle entre l'évolution de ce rayon lumineux traversant des nuages absorbants et celle de l'énergie turbulente à travers les échelles semble relativement naturel. Une interprétation d'une cascade de type Poisson composée consiste à imaginer qu'un nombre aléatoire de tourbillons de tailles intermédiaires transfèrent aléatoirement l'énergie des plus gros vers les plus petits. Le nombre de tourbillons entre la grande échelle a_0 et l'échelle a serait distribué par une loi de Poisson de paramètre proportionnel à $n(a)$. La fonction $H(q) \propto 1 - \bar{F}(q)$ serait une image de la distribution F du taux de transfert W de l'énergie d'un tourbillon à un autre. Le parallèle entre ce type de cascade et la cascade de Richardson est immédiat. L'invariance d'échelle correspond au cas où les structures dissipatives sont distribuées avec la même densité à grande et à petite échelle : on retrouve $n(a) = -\ln(a/a_0)$, et on ne peut pas distinguer une zone "inertielle" d'une zone "dissipative". Si par contre cette densité augmente vers les petites échelles, on aura toujours (par construction) une cascade log-infiniment divisible mais cette fois avec $n(a) \neq -\ln(a/a_0)$. La zone "dissipative" est dans ce cas la gamme d'échelles où la "densité en structures dissipatives" est la plus élevée. De plus, la cascade d'énergie ainsi décrite est (en moyenne) à sens unique puisque le propagateur n'a pas d'inverse infiniment divisible (voir 1.2.3). Rappelons ici encore que si une cascade infiniment divisible décrit l'évolution de distributions $P_s(Y)$ entre s_1 et s_2 par

$$P_{s_2}(Y) = G^{\star[n(s_2)-n(s_1)]} \star P_{s_1}(Y) \tag{III.86}$$

alors on ne peut pas écrire une relation similaire décrivant une évolution en sens inverse de s_2 vers s_1. Formellement, rien n'interdit par contre un débordement du support de la distribution $\underline{F}$ en dehors de l'intervalle $[0,1]$. Dans ce cas, on autoriserait l'existence ponctuelle d'une cascade inverse locale : lorsque $W > 1$ c'est en réalité la petite échelle qui fournit de l'énergie à la grande.

Exemple : F=loi uniforme sur $[0,1]$. Si l'on veut étudier un propagateur log-Poisson composé où les a priori soient réduits au minimum, on peut choisir pour F la loi correspondant à une distribution uniforme des multiplicateurs sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Dans ce cas, on peut montrer [69](p.336) que le propagateur peut s'écrire explicitement à partir de la fonction de Bessel modifiée I_1 sous la forme :

$$G_{\Delta n}(\ln W) = e^{-\Delta n - |\ln W|} \sqrt{\frac{\Delta n}{|\ln W|}}\, I_1(2\sqrt{\Delta n \mid \ln W \mid}) \tag{III.87}$$

Nous nous proposons d'explorer les conclusions de l'analogie que nous venons de présenter dans un cas particulier qui va nous ramener à la température de la turbulence proposée par B. Castaing dans [40].

[11] L'atténuation ω est de même nature qu'une atténuation en dB.

3.2 Un cas particulier : $F(\omega) = \lambda e^{\lambda\omega}$

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier où

$$F(\omega) = \lambda e^{\lambda\omega} \Longleftrightarrow \underline{F}(W) = \lambda W^{\lambda-1}, \qquad \lambda > 0,\ W \in [0,1]. \tag{III.88}$$

Le cas $\lambda = 1$ correspond à l'exemple du paragraphe précédent où la fraction d'énergie perdue W est uniformément distribuée[12] dans $[0,\ 1]$. Cette forme (III.88) plus générale a aussi été proposée en des termes différents par Ambarzumian [10], toujours dans son travail sur la voie lactée. Les densités de probabilité d'ordre supérieur $F^{\star k}$ sont alors données par :

$$F^{\star k}(\omega) = \gamma_{k,\lambda}(|\omega|) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}|\omega|^{k-1}\, e^{-\lambda|\omega|}\ , \qquad -\infty < \omega \leq 0. \tag{III.89}$$

En reportant (III.89) dans (III.81), nous obtenons une probabilité $G_{\Delta n}(\omega)$ comportant un atome de poids $e^{-\Delta n}$ à l'origine (absence de perte) et décrite pour $\omega < 0$ par la densité :

$$\begin{aligned} G_{\Delta n}(\omega) &= e^{-\Delta n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda \Delta n)^k \mid \omega \mid^{k-1}}{k!(k-1)!} e^{-\lambda|\omega|} \\ &\Longleftrightarrow \\ G_{\Delta n}(\omega) &= e^{-\Delta n}\, \sqrt{\lambda \Delta n}\, \frac{e^{-\lambda|\omega|}}{\sqrt{|\omega|}}\, I_1(2\sqrt{\lambda \Delta n |\omega|}), \qquad \omega \in]-\infty,\ 0[, \end{aligned} \tag{III.90}$$

où I_1 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1 [69]. Nous disposons ainsi d'une expression explicite du propagateur $G_{\Delta n}$ infiniment divisible associé à une loi de Poisson composée définie par $F(\omega) = \lambda e^{\lambda\omega}$. Or c'est exactement le propagateur proposé par B. Castaing dans [40] pour décrire l'évolution des distributions des accroissements de la vitesse δv_r à travers les échelles. Nous l'avons déjà évoqué dans le paragraphe 1.3. En effet, il s'agissait de la loi de Poisson composée pour $F(\omega) = e^{\omega/T}/T$ dans (III.46)$\equiv$ (III.81). En posant $\lambda = 1/T$ nous obtenons l'égalité (III.90) qui fournit au passage une écriture explicite (donc utilisable en pratique en Matlab ou autre) de ce propagateur.

Ces remarques nous incitent à développer l'analogie entre la transmission de l'énergie à travers les échelles en turbulence et la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu aléatoire. Le paramètre λ du modèle précédent rend compte de l'importance de l'énergie cédée par un rayon lumineux à un nuage absorbant : plus λ est grand, plus la distribution des multiplicateurs tend à devenir un Dirac concentré en $W = 1$; par conséquent, la transmission d'énergie est d'autant plus efficace. $T = 1/\lambda$ quantifie la capacité dissipative des nuages absorbants. En turbulence, on pourrait dire par analogie que T caractérise les structures dissipatives de l'écoulement. Ainsi, plus T est petite –plus λ est grand– et moins les structures dissipatives sont efficaces : l'énergie peut circuler d'autant plus librement à travers les échelles. Lorsque $T \gg 1$ ($\lambda \ll 1$), les multiplicateurs sont distibués près de 0 de sorte que peu d'énergie est transmise. Dans la situation intermédiaire où $T = 1 = \lambda$, les multiplicateurs sont uniformément distribués dans $[0,\ 1]$.

[12] On peut très bien généraliser ce que nous allons dire à un support autre que $[0,\ 1]$

Supposons que T soit fonction du nombre de Reynolds. A la limite $T \to 0$ ($\lambda \to +\infty$), qu'on est tenté d'imaginer correspondre à $Re \to +\infty$, l'énergie est intégralement transmise sans dissipation depuis la grande échelle L jusqu'à une échelle de Kolmogorov infiniment petite $\eta \to 0$. La fonction $H(q)$ se rapprocherait de $H^{\infty}(q) \propto q$, comportement associé au modèle K41. Il se pourrait aussi que $T = Cte$. Les transferts se feraient alors toujours avec la même efficacité indépendamment du nombre de Reynolds. L'écart systématique à K41 ($H(q)/H(3) \neq q/3$) serait alors une caractéristique intrinsèque universelle des écoulement turbulents. Il faut ici prendre garde de bien distinguer deux questions : la nature du propagateur définie par son noyau, décrit par $H(q)$, d'une part, et la question de l'invariance d'échelle qui concerne essentiellement la fonction $n(a)$ d'autre part. A la lumière de l'exemple développé ci-dessus, nous pourrions interpréter $n(a)$ comme un nombre moyen de structures dissipatives entre la grande échelle $a_0 \sim L$ (échelle d'injection de l'énergie) et l'échelle $a < a_0$ considérée ; $dn/d\ln a$ s'interprèterait alors comme une densité de structures dissipatives par unité (logarithmique) d'échelle. S'il y a invariance d'échelle, $dn/d\ln a = Cte$, ce qui correspondrait à une répartition homogène des structures dissipatives (les "nuages absorbants") dans l'espace des échelles. Sinon, on s'attend naturellement à ce que $dn/d\ln a$ croisse lorsqu'on va vers les petites échelles, les échelles dissipatives. L'expression "structure dissipative" est à comprendre ici dans un sens imagé, sans arrière-pensée dynamique bien établie.

3.3 A propos de la notion d'intermittence statistique

K41. Nous aboutissons dans cet état d'esprit aux interprétations suivantes du phénomène d'intermittence statistique en turbulence. Tout d'abord, le modèle auto-similaire K41

$$\begin{aligned} H(q) &= qH, \text{ avec } H = \frac{1}{3} \qquad n(a) = -\ln\frac{a}{a_0} \\ G_{\Delta n} &= \delta_{(-H)(-\ln(a/a_0))} \end{aligned} \tag{III.91}$$

correspondrait à une transmission sans dissipation de l'énergie à travers les échelles. L'énergie traverserait les échelles pour être dissipée à l'infini (au sens où $-\ln(\eta/L) \underset{\eta\to 0}{\to} +\infty$). La "loi des 4/5" impose alors $H(q) = q/3$ pour les accroissements de la vitesse. Si on essaie d'imaginer la cascade de Richardson associée, celle-ci devrait être constituée d'une distribution continue et homogène de "remous", les plus grands entraînant les plus petits, sans dissipation. Rappelons que la "loi des 4/5" a été démontrée par Kolmogorov dans la limite $Re \to +\infty$, et montre que le terme dissipatif $6\nu\partial\mathbb{E}[\delta v_r^2]/\partial r$ du second membre de l'équation de Kármán-Howarth (éq. (I.11) Ch. **I**) est asymptotiquement négligeable ($\to 0$ quand $Re \to \infty$). Cette situation correspond au cas $\beta = 1$ dans (III.40) p.74 du modèle log-Poisson. La cascade perd dans ce cas tout caractère aléatoire : on aurait l'identité statistique (à une dilatation près) des processus $\mid T_v(a,t) \mid$ (resp. δv_r, $\varepsilon_r \ldots$) aux différentes échelles.

Log-Poisson. Dans la continuité, le modèle le plus naturel pour décrire ensuite un écart à K41, tout en préservant l'invariance d'échelle, serait le modèle log-Poisson. Ce modèle correspond à une situation où toutes les structures dissipatives (ou les nuages d'Ambarzumian) ne transmettraient qu'une fraction $\beta = Cte < 1$ de l'énergie. Le facteur $W_0 = e^{-\gamma}$ de (III.40) décrit ce qui se passe en l'absence de telles "structures". Chaque pas est déterministe. Si on suppose une distribution homogène en échelle des structures dissipatives, le nombre k de ces structures intervenant dans le transfert d'énergie entre une grande échelle a_0 et une plus petite notée a est distribué selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda \propto -\ln(a/a_0)$. Par conséquent, on obtient comme propagateur :

$$
\begin{aligned}
&W = e^{-\gamma}\beta^k = W_0\,\beta^k \\
&H(q) = \gamma q + \lambda\,(1-\beta^q)\ , \qquad n(a) = -\ln\frac{a}{a_0} \\
&G_{\Delta n}(\ln W) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\Delta n)^k}{k!}\, e^{-\lambda\Delta n}\, \underbrace{\delta\left(\ln W - k\ln\beta + \gamma\Delta n\right)}_{\delta\left(\ln \frac{W}{W_0^{\Delta n}} - k\ln\beta\right)}
\end{aligned}
\tag{III.92}
$$

On a alors $H(q) \neq qH$ tout en conservant l'invariance d'échelle. La non-linéarité de $H(q)$ pourrait donc s'interpréter comme une conséquence de l'influence de la dissipation à toutes les échelles, de manière homogène (fig. III.6).

Log-Poisson composé invariant d'échelle. De manière plus générale, un modèle log-Poisson composé (avec $F \neq \delta_{\ln\beta}$) invariant d'échelle sera aussi tel que $H(q)$ est une fonction non linéaire de q. Le nouvel ingrédient est la fluctuation du facteur β. Ainsi non seulement le nombre de structures k rencontrées entre deux échelles est aléatoire, mais le taux de transmission lui aussi devient aléatoire, distribué par F. S'il s'avérait que la dissipation intervient à toutes les échelles, et ce pour tout nombre de Reynolds suffisamment grand, alors l'écart de $H(q)$ à $q/3$ serait sans doute observable à tout Re. Sur la figure III.6, au milieu, un modèle log-Poisson composé se distinguerait du modèle log-Poisson par une variation aléatoire de la taille des "fuites" à chaque échelle.

Log-Poisson composé *non* invariant d'échelle. Ceci ne préjuge en rien de la forme de la fonction $n(a)$ qui peut (doit !) dépendre du nombre de Reynolds. En effet, $n(a)$ doit rendre compte d'une dissipation plus efficace à petite échelle qui se traduira par une augmentation de $-dn/d\ln a$ quand $a \to 0$. Elle doit aussi être influencée à grande échelle par le mécanisme d'injection. La représentation de ce modèle général à la manière de la figure III.6 ressemblerait à la figure du bas, la taille des "fuites" variant de manière aléatoire.

Bien sûr, nous ne disposons d'aucun argument dynamique rigoureux pour justifier cette vision des choses. Il s'agit essentiellement de proposer une *représentation* de la réalité des choses. Cependant, il nous semble que ce point de vue (statistique) original mérite d'être développé et étudié, notamment dans l'idée de mettre au point une méthode de synthèse de processus vérifiant une cascade log-infiniment divisible prescrite qui permettrait de modéliser les données. Remarquons que nous parlons bien ici du taux de transfert d'énergie W à travers les échelles, et non de la dissipation ε_r elle-même, respectant ainsi le conseil de B. Mandelbrot [103] :

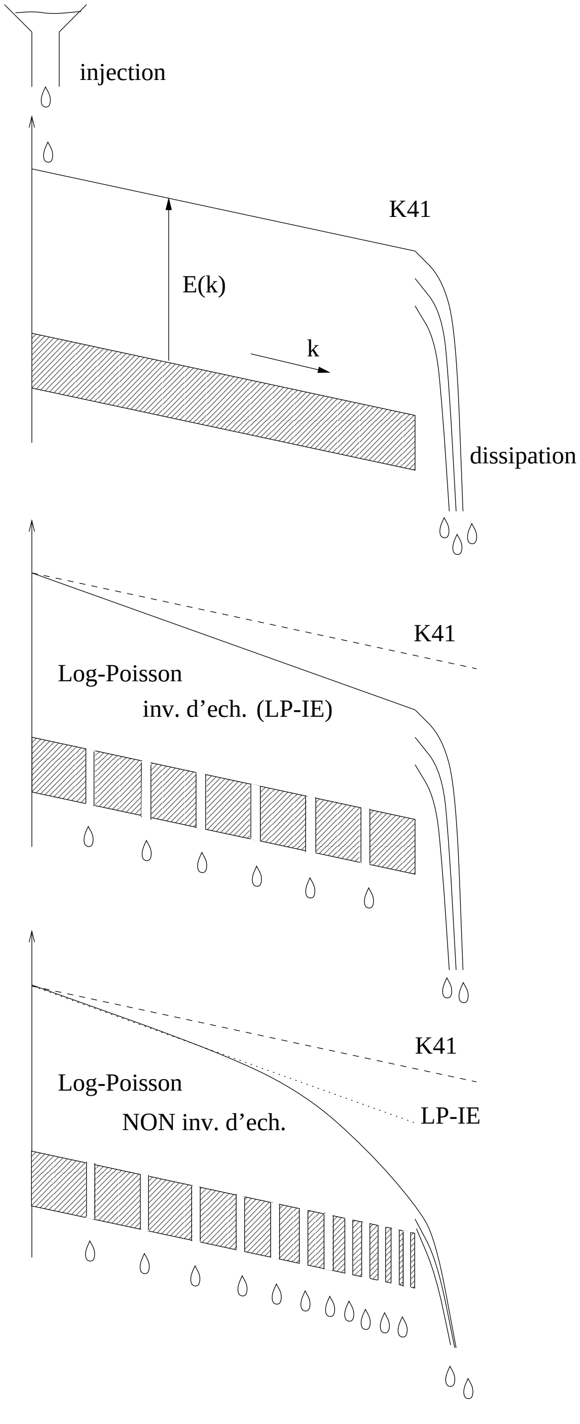

Fig. III.6: Représentation simplifiée de l'analogie entre la cascade d'énergie en turbulence et un écoulement sur un plan incliné. En haut, K41 : toute la dissipation a lieu à l'échelle η infiniment petite ($k \to \infty$). Au milieu, le modèle log-Poisson invariant d'échelle : la dissipation a lieu aléatoirement de manière homogène à toutes les échelles grâce à un seul type d'événements singuliers ($\beta = Cte$). En bas, un modèle non-invariant d'échelle tient compte de la densité croissante en structures dissipatives aux échelles les plus petites ($k \to \infty$). Le modèle log-Poisson composé, non-représenté, introduit la fluctuation de β, donc de la taille des "fuites".

"As a matter of fact, the accepted role dissipation plays in the current phenomenological approach to turbulence should perhaps be downgraded, and the canonical model of a cascade be rephrased in terms of energy transfer between different scale sizes."

Enfin, lorsqu'un modèle de cascade log-infiniment divisible est valide, un grand nombre de distributions infiniment divisibles représentent de bons candidats. Nous ne pouvons (au moins aujourd'hui) prétendre à la connaissance de la nature exacte du propagateur. Cependant, parmi les candidats potentiels, nous devons en distinguer au moins deux. D'une part, la simplicité du propagateur log-normal combinée à la très bonne approximation qu'il représente en font le premier candidat sérieux. Même si certains arguments théoriques[13] [123], eux-mêmes sujet à discussion [103, 113], l'excluent, son intérêt pratique est loin d'être négligeable puisqu'il permet de décrire le premier ordre de l'écart à K41 (fig. III.2 & III.3). D'autre part, les modèles log-Poisson composés[14] présentent une grande richesse. Comme nous l'avons vu, ils sont facilement interprétables, et suggèrent une vision originale de la cascade d'énergie en turbulence. Ils échappent aux critiques généralement soulevées par le modèle log-normal. De plus, il en existe une grande variété, ce qui les rend très modulables –un tel modèle pourrait notamment prendre en compte l'existence éventuelle de cascades inverses locales. Enfin, nous savons grâce au théorème 2 du 1.1.3 que les distributions de Poisson composées permettent d'approcher aussi finement que l'on veut toutes les distributions infiniment divisibles.

4 Propagateur et équation de Fokker-Planck

Un autre formalisme parfois évoqué en turbulence est celui des processus de Markov [74, 107, 120, 129]. Les distributions infiniment divisibles sont généralement invoquées en turbulence pour décrire une cascade multiplicative à travers les échelles. Plus précisément, on a même une tendance naturelle à raisonner sur une cascade de multiplicateurs *indépendants* entre eux. Les processus de Markov offrent deux degrés de liberté supplémentaires. Tout d'abord, ils ne supposent pas une description multiplicative. De plus, ce sont les processus les plus simples faisant intervenir une dépendance entre événements successifs. Un autre aspect important des processus de Markov est leur description éventuelle par une équation aux dérivées partielles (type Fokker-Planck) et/ou par une équation différentielle stochastique (type Langevin). La notion de semi-groupe est ici encore très importante. Dans le domaine des équations aux dérivées partielles, la théorie des semi-groupes est essentiellement utilisée [33, 128, 178] pour démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions. Les spécialistes des équations différentielles stochastiques sont aussi préoccupés par la mise au point d'algorithmes de résolution [177]. Le monde des cascades log-infiniment divisibles n'est du coup pas si loin puisque nous savons notamment grâce au théorème 2 (page 65) qu'il existe des liens entre semi-groupes d'opérateurs et distributions infiniment divisibles...

Nous retraçons les chemins qui, partant des processus de Markov, des cascades infini-

[13] Arguments théoriques une fois encore basés sur une hypothèse d'invariance d'échelle.
[14] La loi normale n'appartient pas à la famille des lois de Poisson composées.

ment divisibles ou de l'équation de Langevin mènent à l'équation de Fokker-Planck[15] et aux semi-groupes–parmi eux les semi-groupes de convolution. L'objectif est de bien faire apparaître les différentes hypothèses et propriétés mises en jeu tout au long de ces chemins qui se rejoignent pour établir ensuite des parallèles pertinents.

Cette partie est partagée en trois temps. La notion de *générateur* $\mathcal{U}$ revient sous différentes formes de façon récurrente. D'abord, le paragraphe 4.1 présente succinctement les notions essentielles concernant les processus de Markov (§ 4.1.1), le lien avec une évolution multiplicative (§ 4.1.2), l'équation maîtresse et le développement de Kramers-Moyal (§ 4.1.3), pour aboutir à l'équation de Fokker-Planck (§ 4.1.4). Nous nous concentrons ensuite sur le lien entre cascades log-infiniment divisibles et équation de Fokker-Planck (§ 4.2). Enfin, le dernier paragraphe (§ 4.3) met en évidence les liens entre équation de Langevin, équation de Fokker-Planck et cascades log-infiniment divisibles, le point commun étant l'existence d'une structure de semi-groupe associée. Les principales sources qui ont inspirées cette réflexion sont [33, 41, 69, 85, 141, 177].

4.1 Processus de Markov et équation de Fokker-Planck

4.1.1 Processus de Markov

Plusieurs travaux [55, 74, 75, 129] font apparaître une équation de Fokker-Planck ou un développement de Kramers-Moyal en turbulence. Les processus de Markov[16] sont le point de départ le plus général pour aboutir à une équation de Fokker-Planck. Ils sont gouvernés par une probabilité de transition qui joue le rôle du propagateur des semi-groupes de convolution, mais dans un cadre plus général : il n'est plus nécessairement question de convolution, mais simplement d'évolution, de transition. La présentation ci-dessous concerne un processus en temps, mais le formalisme rest valable si on remplace t par une échelle a ou encore par $-\ln a$, $n(a)$...

Définition. Un *processus de Markov* X est un processus stochastique vérifiant la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \forall\, n\;,\; \forall\, t_1 &< t_2 < \ldots < t_n, \\ &P_{1|n-1}(X_n, t_n|X_1, t_1; \ldots; X_{n-1}, t_{n-1}) \;=\; P_{1|1}(X_n, t_n|X_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \tag{III.93}$$

La densité de probabilité conditionnelle à t_n, étant donné X_{n-1} à t_{n-1}, est parfaitement déterminée et n'est pas affectée par les valeurs X_k, $k < n-1$ antérieures. $P_{1|1}$ est appelée *probabilité de transition.* ◁

Exemple : le processus de Markov le plus connu en physique est le mouvement brownien qui décrit le mouvement d'une grosse particule subissant les chocs aléatoires d'un bain de

[15] La notion générale d'équation de Fokker-Planck a été développée par Kolmogorov dans [90].
[16] A.A. Markov (1856-1922).

petites particules supposées indépendantes.

Un processus de Markov est entièrement déterminé par la donnée de sa distribution initiale $P_1(X_1, t_1)$ et de sa probabilité de transition $P_{1|1}(X_2, t_2|X_1, t_1)$. Cette simplicité a fait le succès des processus de Markov. Une propriété essentielle de la probabilité de transition est la *relation de Chapman-Kolmogorov* :

$$\forall\, t_1 < t_2 < t_3, \quad P_{1|1}(X_3, t_3|X_1, t_1) \;=\; \int P_{1|1}(X_3, t_3|X_2, t_2) P_{1|1}(X_2, t_2|X_1, t_1)\, dX_2 \tag{III.94}$$

D'autre part, on a nécessairement :

$$\forall\, t_1 < t_2, \quad P_1(X_2, t_2) \;=\; \int P_{1|1}(X_2, t_2|X_1, t_1) P_1(X_1, t_1)\, dX_1. \tag{III.95}$$

Réciproquement, deux fonctions positives P_1 et $P_{1|1}$ vérifiant les conditions (III.94) et (III.95) définissent un unique processus de Markov.

Les processus de Markov homogènes présentent un intérêt particulier, notamment pour décrire les fluctuations à l'équilibre. Soit une quantité $X(t)$ caractérisant un système physique fermé isolé. Supposons que $X(t)$ constitue un processus de Markov homogène et stationnaire. Alors la distribution P_1 est indépendante du temps, et n'est rien d'autre que la distribution de X à l'équilibre, issue de la mécanique statistique. Le théorème fluctuation-dissipation [85] n'est pas loin... Une autre observation importante est que la probabilité de transition $P_{1|1}$ d'un processus de Markov homogène ne dépend pas des deux instants (t_1, t_2) mais de l'intervalle de temps $\tau = t_2 - t_1$ qui les sépare. Nous notons alors

$$P_{1|1}(X_2, t_2|X_1, t_1) \;=\; T_\tau(X_2|X_1)\,, \quad \tau = t_2 - t_1. \tag{III.96}$$

La relation de Chapman-Kolmogrorov devient ainsi pour $\tau, \tau' > 0$

$$T_{\tau+\tau'}(X_3|X_1) \;=\; \int T_{\tau'}(X_3|X_2) T_\tau(X_2|X_1)\, dX_2 \tag{III.97}$$

Traduite en termes d'opérateurs d'évolution, cette équation s'écrit :

$$\mathcal{T}(\tau + \tau') \;=\; \mathcal{T}(\tau')\, \mathcal{T}(\tau) \tag{III.98}$$

Nous reconnaissons la structure d'un *semi-groupe* avec $\mathcal{T}(0) = \mathbb{1}$. La relation (III.98) est à rapprocher de (III.7). Cependant il n'est pas question ici de convolution, mais d'une simple composition des opérateurs d'évolution T_τ. Les processus de Markov homogènes donnent naissance à un semi-groupe.

Exemples :

(a) *Processus de Ornstein-Uhlenbeck.* C'est l'exemple le plus connu de processus de Markov stationnaire. Il est défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_1(X_1) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{X_1^2}{2}) \\[2ex] T_\tau(X_2|X_1) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-2\tau})}} \exp\left[-\dfrac{(X_2 - X_1 e^{-\tau})}{2(1 - e^{-2\tau})} \right] \end{array} \right. \tag{III.99}$$

A l'origine, ce processus a été introduit pour décrire la vitesse d'une particule brownienne. Ce processus est de moyenne nulle, et sa fonction d'autocorrélation vaut simplement $\kappa(\tau) = e^{-\tau}$. C'est le seul processus de Markov non trivial qui soit à la fois homogène et gaussien (théorème de Doob [85]). Nous verrons paragraphe 4.1.4 qu'il est solution d'une équation de Fokker-Planck. Naert et al. [107, 120] présentent ce processus en échelle (on remplace t par r ou a) comme une première approximation pour décrire la cascade d'énergie à travers les échelles en turbulence.

(b) *Processus de Markov pseudo-Poisson.* On généralise la notion de processus de Poisson composé en remplaçant la convolution dans (III.44) par une simple composition. Soit T le noyau d'une chaîne de Markov. En (très) bref, une chaîne de Markov est un processus de Markov à temps discret (voir [70]). On peut voir T comme un équivalent de T_τ pour un τ fixé. Soit G_t la probabilité de transition stationnaire définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} G_\tau(X_2|X_1) & = & e^{-\alpha\tau}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha\tau)^k}{k!}T^{(k)}(X_2|X_1) \\ P(X_2, t+\tau) & = & \displaystyle\int G_\tau(X_2|X_1)\,P(X_1,t)\,dX_1. \end{array}\right. \tag{III.100}$$

où $T^{(k)}$ correspond à la probabilité de transition à k pas (soit k applications successives du noyau T). G_t décrit un processus de Markov pseudo-Poisson. Le générateur $\mathcal{U}$ est ici décrit par $\alpha(\mathcal{T} - 1)$. Dans le cas où $T(X_2|X_1) = T(X_2 - X_1)$ on retrouve les lois de Poisson composées. La définition (III.100) s'interprète de façon tout à fait similaire (voir 3). Brièvement, $X(t) = S_{N(t)}$ où $N(t)$ est un processus de Poisson et $S_{N(t)}$ la somme de X_1, $X_2, \dots X_{N(t)}$ constituant une chaîne de Markov gouvernée par le noyau de transition T.

Nous rappelons dans les paragraphes 4.1.3 et 4.1.4 comment apparaît une équation de Fokker-Planck pour les processus de Markov en passant par le développement de Kramers-Moyal. Le paragraphe suivant met en lumière une condition d'équivalence entre une description markovienne et une évolution multiplicative.

4.1.2 Evolution markovienne multiplicative

Nous voulons remarquer ici qu'il suffit d'imposer au noyau de transition $T(X_2 \mid X_1)$ une forme particulière pour être ramené à la description d'une évolution multiplicative. Nous nous appuyons pour plus de clarté sur la description du modèle d'Ambarzumian décrit plus haut (§ 3).

Supposons que l'évolution de l'énergie d'un rayon lumineux traversant un espace peuplé de nuages absorbants est régie par un processus de Markov. Soit $T(X_2 \mid X_1)$ la densité de probabilité de transition de $X_1(r_1)$ à $X_2(r_2)$, X_1 et X_2 représentant l'énergie du rayon lumineux respectivement avant et après le passage à travers un nuage absorbant. En suivant un raisonnement analogue à celui du 3, il est relativement facile de voir que l'évolution de l'énergie du rayon lumineux avec la distance parcourue notée r est décrite par un processus de Markov pseudo-Poisson (voir 4.1.1(b)). La densité de probabilité de transition entre

$X_1(0)$ et $X_2(r)$ s'écrit de manière générale :

$$G_r(X_2 \mid X_1) \;=\; e^{-\alpha r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha r)^l}{l!} T^{(l)}(X_2 \mid X_1) \tag{III.101}$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que *la fraction d'énergie perdue* à chaque traversée d'un nuage *est indépendante de l'énergie initiale*, alors

$$T(X_2 \mid X_1)\, dX_2 \;=\; \theta\left(\frac{X_2}{X_1}\right) \frac{dX_2}{X_1} \;=\; \theta_{\log}(\ln X_2 - \ln X_1)\, d\ln X_2, \tag{III.102}$$

où θ est une distribution de probabilité concentrée sur $[0,\ 1]$. Les probabilités de transition d'ordre supérieure vérifient (cf. Chapman-Kolmogorov)

$$T^{(l+m)}(X_3 \mid X_1) = \int T^{(l)}(X_3 \mid X_2)\, T^{(m)}(X_2 \mid X_1)\, dy \tag{III.103}$$

C'est la propriété (III.102) traduit en réalité une évolution *multiplicative* de l'énergie. On retrouve la trace de cette propriété dans le fait que $T^{(l)}$ et G_s peuvent se réécrire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T^{(l)}(X_2 \mid X_1)\, dX_2 & = & \theta^{(l)} \left(\dfrac{X_2}{X_1}\right) \dfrac{dX_2}{X_1} \\[2ex] G_s(X_2 \mid X_1)\, dX_2 & = & Q_s \left(\dfrac{X_2}{X_1}\right) \dfrac{dX_2}{X_1} \end{array} \right. \tag{III.104}$$

En reportant (III.104) dans (III.103) nous avons

$$\begin{array}{lllllll} & \displaystyle\int & T^{(l)}(X_3 \mid X_2) & T^{(m)}(X_2 \mid X_1) & dX_2 & = & T^{(l+m)}(X_3 \mid X_1) \\ \Rightarrow & \displaystyle\int & \dfrac{1}{X_2}\theta^{(l)}(\dfrac{X_3}{X_2}) & \dfrac{1}{X_1}\theta^{(m)}(\dfrac{X_2}{X_1}) & dX_2 & = & \dfrac{1}{X_1}\ \theta^{(l+m)}(\dfrac{X_3}{X_1}) \\ \Rightarrow & \displaystyle\int & \dfrac{X_2}{X_3}\theta^{(l)}_{\log}(\ln(\dfrac{X_3}{X_2})) & \dfrac{X_1}{X_2}\theta^{(m)}_{\log}(\ln(\dfrac{X_2}{X_1})) & \dfrac{dX_2}{X_2} & = & \dfrac{X_1}{X_3}\ \theta^{(l+m)}_{\log}(\ln(\dfrac{X_3}{X_1})) \\ \Rightarrow & \displaystyle\int & \theta^{(l)}_{\log}(\ln(\dfrac{X_2}{X_1})) & \theta^{(m)}_{\log}(\ln(\dfrac{X_3}{X_1}) - \ln(\dfrac{X_2}{X_1})) & d\ln(\dfrac{X_2}{X_1}) & = & \theta^{(l+m)}_{\log}(\ln(\dfrac{X_3}{X_1})) \end{array} \tag{III.105}$$

d'où finalement :

$$\theta^{(l)}_{\log} \star \theta^{(m)}_{\log} \;=\; \theta^{(l+m)}_{\log} \tag{III.106}$$

Le passage à la variable $\omega = \ln(X_2/X_1)$ transforme les lois de compositions en lois de *convolution*. Nous pouvons décrire l'évolution de X_1 à X_2 par un processus de Markov pseudo-Poisson ou, de manière équivalente, par un propagateur log-Poisson composé $G_r(\omega)$ tel que :

$$G_r(\omega) \;=\; e^{-\alpha r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\alpha r)^l}{l!}\ F^{\star l}(\omega) \tag{III.107}$$

où $F = \theta^{(1)}_{\log}$. Nous retrouvons le résultat (III.85) du 3.1. De manière générale, c'est la propriété (III.102) qui assure qu'une description multiplicative est pertinente. On passe ainsi de la recherche d'une description d'un processus de Markov sur δX à l'étude d'un processus à accroissements indépendants pour $\ln X$. Notons que dans le cadre d'une évolution multiplicative il faudrait certainement mesurer les longueurs de corrélation sur une échelle logarithmique.

Remarque : on peut par ailleurs montrer que la densité P_r de l'énergie $x(r)$ du rayon lumineux du modèle d'Ambarzumian vérifie l'équation de Fokker-Planck généralisée [69]

$$\frac{\partial P_r(X)}{\partial r} = -c\frac{\partial P_r(X)}{\partial X} - \alpha \int (\delta_X(z) - T(X \mid z))\, P_r(z)\, dz \tag{III.108}$$

Le premier terme du second membre n'est qu'un terme de translation qui rend compte de l'effet cumulé du rayonnement en volume. Le terme en $\delta_X(z)$ correspond à la probabilité que le rayon lumineux n'ait traversé aucun nuage. Le dernier terme rend compte de l'absorption aléatoire de l'énergie lumineuse par les nuages qui donne lieu aux fluctuations de son intensité (voir 3.1 pour les détails du modèle).

4.1.3 De l'équation maîtresse au développement de Kramers-Moyal

L'équation maîtresse. L'équation maîtresse est équivalente à la relation de Chapman-Kolmogorov pour les processus de Markov. Elle peut se lire comme un bilan "entrée-sortie" ou "excitation-désexcitation".

Pour simplifier, considérons T_τ la probabilité de transition d'un processus de Markov homogène. Soit $W(X_2|X_1)$ la *probabilité de transition* de X_1 à X_2 *par unité de temps* telle que

$$T_\tau(X_2|X_1) = (1-a_0(X_1)\tau)\,\delta(X_2-X_1) + \tau W(X_2|X_1) + o(\tau), \quad W(X_2|X_1) \geq 0. \tag{III.109}$$

Le coefficient $(1-a_0\tau)$ est la probabilité qu'aucune transition n'ait lieu pendant l'intervalle de temps τ

$$a_0(X_1) = \int W(X_2|X_1)\, dX_2 \tag{III.110}$$

On peut montrer que la relation de Chapman-Kolmogorov (III.94) est alors équivalente à l'*équation maîtresse* [85]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau(X_3|X_1) = \int \{W(X_3|X_2)T_\tau(X_2|X_1) - W(X_2|X_3)T_\tau(X_3|X_1)\}\, dX_2. \tag{III.111}$$

Elle est en général écrite pour la distribution P elle-même sous la forme :

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = \int \{W(X|X')P(X',t) - W(X'|X)P(X,t)\}\, dX'. \tag{III.112}$$

Cependant, il ne faut pas oublier que l'équation maîtresse porte sur la probabilité de transition : par définition, elle décrit un processus de Markov. Le fait que les distributions instantanées $P(X,t)$ vérifient l'équation maîtresse n'est pas une condition suffisante.

L'équation maîtresse peut se lire comme une équation-bilan. Le premier terme du membre de droite de (III.112) est un terme de "gain" : il représente le taux (la probabilité par unité de temps) d'arrivées en X. Le second terme $W(X'|X)P(X,t)dX'$ est un terme de "perte" : il représente le taux de départs depuis X. La différence est la variation de la probabilité d'être en X à l'instant t. Dans le cas d'un processus de Markov inhomogène, la symétrie entre les deux termes disparaît, et il faut introduire séparément des taux de transition W_G et W_P associés respectivement au gain et à la perte [141].

Le développement de Kramers-Moyal. Exprimons tout d'abord le taux de transition W en fonction du point de départ et de la taille du saut :

$$W(X|X') = W(X', r), \quad r = X - X'. \tag{III.113}$$

L'équation générale (III.112) devient

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = \int W(X-r, r) P(X-r, t)\, dr \;-\; P(X,t) \int W(X, -r)\, dr. \tag{III.114}$$

Sous réserve que $W(X', r)$ soit une fonction très piquée de r et varie lentement avec X', et si on suppose que $P(X,t)$ varie lentement avec X, on peut développer l'intégrande de (III.114) en une série de Taylor de sorte que :

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial X^k} \{D^{(k)}(X)\, P(X,t)\} \tag{III.115}$$

où les coefficients $D^{(k)}$ sont liés aux moments des sauts par

$$D^{(k)}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} r^k W(X, r)\, dr. \tag{III.116}$$

C'est le *développement de Kramers-Moyal* de l'équation maîtresse. Sous les conditions de régularité mentionnées ci-dessus, ce développement est équivalent à l'équation maîtresse. Le générateur $\mathcal{U}$ du semi-groupe décrivant le processus de Markov associé est l'opérateur :

$$\mathcal{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial X^k} \{D^{(k)}(X) \bullet \} \tag{III.117}$$

L'équation de Fokker-Planck suppose que tous les termes d'ordre supérieur à 2 sont négligeables. Attention cependant à ne pas considérer les termes successifs du développement de Kramers-Moyal comme ceux du développement de l'équation maîtresse relativement à un petit paramètre. Ceci n'est en général vrai que jusqu'à l'ordre 2 [85].

4.1.4 L'équation de Fokker-Planck

On peut définir l'équation de Fokker-Planck[17] soit pour une probabilité de transition, soit pour la distribution d'une variable aléatoire sur laquelle s'opère les transitions. Nous

[17] L'équation de Fokker-Planck est aussi appelée *seconde équation de Kolmogorov* ou *équation de Kolmogorov directe*.

utilisons cette deuxième définition. Elle décrit l'évolution d'une distribution avec le temps (le temps pourra être remplacé par un paramètre quelconque tel r, a, $-\ln(a/a_0)$, $n(a)\dots$). Plusieurs travaux en turbulence proposent des équations du type "Fokker-Planck" pour décrire l'évolution des distributions des accroissements de vitesses δv_r à travers les échelles, citons [13, 55, 74, 120, 176].

Définition. L'équation de Fokker-Planck pour les distributions $P(X,t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X}\left[D^{(1)}(X,t)P(X,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left[D^{(2)}(X,t)P(X,t)\right] \tag{III.118}$$

On notera $\mathcal{U}_{FP}$ l'opérateur (générateur de Fokker-Planck)

$$\mathcal{U}_{FP} = -\frac{\partial}{\partial X}D^{(1)}(X,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}D^{(2)}(X,t) \tag{III.119}$$

$\triangleleft$

Par définition, l'équation de Fokker-Planck est une équation linéaire sur P. L'adjectif "linéaire" peut donc être utilisé dans un autre sens. On parle d'équation de Fokker-Planck *linéaire* lorsque $D^{(1)}(X,t)$ est une fonction linéaire de X et $D^{(2)}(X,t)$ est constant :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X}\left[(A_0 + A_1 X)P\right] + \frac{B_0}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \tag{III.120}$$

Si $A_1 < 0$, le processus de Markov stationnaire associé est le *processus de Ornstein-Uhlenbeck*. Pour $A_1 \geq 0$, il n'y a pas de solution stationnaire.

Nous avons rappelé dans ce 4.1 deux propriétés fondamentales des processus de Markov. D'une part, les probabilités de transition d'un processus de Markov homogène donnent naissance à une structure de *semi-groupe* (voir 4.1.1) telle que $\mathcal{T}(\tau+\tau') = \mathcal{T}(\tau')\mathcal{T}(\tau)$. Les semi-groupes de convolution en sont une sous-classe. D'autre part, l'équation de Fokker-Planck représente une description limitée[18] à l'ordre 2 de l'évolution des marginales du processus : elle ne fait intervenir que les moments d'ordres 1 et 2 des sauts, c'est-à-dire les deux premiers coefficients $D^{(1)}$ et $D^{(2)}$ du développement de Kramers-Moyal. Le prochain paragraphe suit un autre chemin menant lui aussi à l'équation de Fokker-Planck mais cette fois-ci à partir d'une cascade log-infiniment divisible.

4.2 Cascades log-infiniment divisibles et équation de Fokker-Planck

Nous rappelons d'abord dans le 4.2.1 comment on peut déduire une équation de Fokker-Planck de l'existence d'un propagateur log-normal pour une cascade log-infiniment divisible à partir d'une remarque de B. Castaing [41] et nous discutons la portée de cette

[18] Attention au caractère approximatif de l'équation de Fokker-Planck. Les ordres successifs du développement de Kramers-Moyal ne sont pas les termes successifs d'un développement selon un petit paramètre.

observation. Le même raisonnement peut s'appliquer à une cascade log-infiniment divisible quelconque pour obtenir le développement de Kramers-Moyal. Nous proposons ensuite dans le 4.2.2 une démonstration originale du lien entre les cumulants C_k du noyau du propagateur d'une cascade log-infiniment divisible (voir 1.2) et les coefficients $D^{(k)}$ du développement de Kramers-Moyal (III.115).

4.2.1 Propagateur log-normal et équation de Fokker-Planck

Nous reformulons ici à notre manière l'argument de B. Castaing [41] qui établit le lien entre propagateur log-normal et équation de Fokker-Planck.

Soit $G(\ln W)$ le noyau d'un propagateur log-normal décrivant l'évolution de $\underline{P}_s(\delta X)$, et soit $n(s)$ la profondeur associée. On suppose que les évolutions des ailes positives et négatives sont régies par le même propagateur. Il suffit alors d'effectuer les calculs pour $\delta X > 0$. Dans ce cas, on peut utiliser $P_s(\ln \delta X) = \delta X \underline{P}_s(\delta X)$. La fonction génératrice du propagateur s'écrit

$$\tilde{G}_s(q) = e^{-H(q)\, n(s)} = \exp\left\{ \left(C_1 q + \frac{C_2}{2} q^2 \right) n(s) \right\} \tag{III.121}$$

D'où l'on tire

$$\frac{\partial \tilde{G}_s}{\partial n} = \left(C_1 q + \frac{C_2}{2} q^2 \right) \tilde{G}_s(q) \tag{III.122}$$

$$\Downarrow \qquad \frac{\partial}{\partial \ln W} \equiv -q$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_s}{\partial n} &= -C_1 \dfrac{\partial G_s}{\partial \ln W} + \dfrac{C_2}{2} \dfrac{\partial^2 G_s}{\partial \ln W^2} \\ G_0 &= \delta_0. \end{cases} \tag{III.123}$$

où l'on voit apparaître la correspondance entre les puissances de q décrivant $H(q)$ et les dérivées successives décrivant le générateur $\mathcal{U}$. L'équation d'évolution de P_s entre s_0 et s se résume ici à une simple convolution (II.69) que nous réécrivons :

$$P_s = G^{\star n(s)} \star P_{s_0} \qquad (n(s_0) = 0). \tag{III.124}$$

On peut donc voir G_s comme une fonction de Green associée à l'équation (III.123) et $P_s(\ln \delta X)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_s}{\partial n} &= -C_1 \dfrac{\partial P_s}{\partial \ln \delta X} + \dfrac{C_2}{2} \dfrac{\partial^2 P_s}{\partial \ln \delta X^2} \\ P_{n(s)=0} &= P_{s_0} \end{cases} \tag{III.125}$$

où l'on reconnaît une équation de Fokker-Planck linéaire. On utilise la relation

$$P_s(\ln \delta X) = \delta X \underline{P}_s(\delta X)$$

pour obtenir l'équation sur $\underline{P}_s$:

$$\frac{\partial \underline{P}_s}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \delta X}\left[(C_1+\frac{C_2}{2})\delta X\, \underline{P_s}\right] + \frac{\partial^2}{\partial \delta X^2}\left[\frac{C_2}{2}\delta X^2\, \underline{P_s}\right] \qquad \text{(III.126)}$$

Nous aboutissons à une équation de Fokker-Planck non linéaire (la même démonstration est valable pour $\delta X \leq 0$). Cette non-linéarité est cependant bien particulière puisqu'elle traduit l'invariance par dilatation $\delta X \rightarrow \alpha\delta X$, ou, de façon équivalente, l'invariance par translation en ln $\mid \delta X \mid$. Ecrite pour la quantité δX, l'équation (III.126) est bien plus compliquée que (III.125) qui fait intervenir la variable $\ln \delta X$, plus adaptée à la nature du problème. De même, l'utilisation de la variable $n(s)$ à la place de la variable s simplifie la représentation du problème. Les variables $\ln \delta X$ et $n(s)$ sont les "bonnes" variables, respectant les symétries du problème.

En turbulence, les résultats expérimentaux des travaux proposant de décrire les distributions des accroissements de la vitesse par une équation de Fokker-Planck [74] n'excluent pas l'existence d'une cascade log-infiniment divisible associée. Signalons par ailleurs que l'estimation des coefficients de Kramers-Moyal grâce à des estimateurs de moyennes conditionnelles comme dans [74] s'avère difficile et entachée de barres d'erreur importantes. Ces problèmes d'estimation sont sans doute au moins en partie dus à l'utilisation de la variable δv_r plutôt que $\ln \delta v_r$. Nous retombons sur la question du choix d'une représentation adaptée, déjà évoquée en 4.1.2. A ce choix, s'ajoute le problème du choix des estimateurs qui permettront de (in-)valider le modèle.

4.2.2 Le développement de Kramers-Moyal, bis...

Nous présentons ci-dessous une démonstration originale de l'égalité entre coefficients de Kramers-Moyal et cumulants du propagateur pour une cascade log-infiniment divisible (lorsque les cumulants de tous ordres du propagateurs existent). Le point de départ est la relation entre la probabilité de transition T et sa fonction caractéristique θ dans le cas général :

$$T(Y,a_2|Y',a_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(Y-Y')}\,\theta(u,Y',a_1,a_2)\,du \qquad \text{(III.127)}$$

Par définition des cumulants κ_k de T on a

$$T(Y,a_2|Y',a_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(Y-Y')}\,\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iu)^k}{k!}\kappa_k(Y',a_1,a_2)\right\}\,du \qquad \text{(III.128)}$$

Or nous nous intéressons ici au cas particulier où T décrit une cascade log-infiniment divisible donc les cumulants κ_k sont tels que

$$\forall\, k, \quad \kappa_k(Y',a_1,a_2) = C_k\,[n(a_2)-n(a_1)] = C_k\,\Delta n. \qquad \text{(III.129)}$$

En reportant (III.129) dans (III.128) nous obtenons

$$\begin{aligned}
T(Y,a_2|Y',a_1) - T(Y,a_1|Y',a_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(Y-Y')}\left\{\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iu)^k}{k!}C_k\Delta n\right]-1\right\}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(Y-Y')}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iu)^k}{k!}C_k\right)^p\frac{\Delta n^p}{p!}du \\
&\overset{\tau\to 0}{\simeq} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(Y-Y')}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iu)^k}{k!}C_k\right)\Delta n \\
&\overset{\tau\to 0}{\simeq} \Delta n\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial Y^k}\frac{C_k}{k!}\delta(Y-Y')\right)
\end{aligned} \tag{III.130}$$

d'où dans la limite $(a_2 - a_1) \to 0$

$$\frac{T(Y,a_2|Y',a_1) - T(Y,a_1|Y',a_1)}{\Delta n} \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial Y^k}\frac{C_k}{k!}\delta(Y-Y') \tag{III.131}$$

On en déduit l'équation pour les distributions P_a régies par T :

$$\frac{\partial P_a}{\partial n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial Y^k}\left[\,C_k\,P_a\,\right] \tag{III.132}$$

où l'on reconnaît le développement de Kramers-Moyal (III.115) avec

$$D^{(k)} \,=\, C_k \tag{III.133}$$

Pour une cascade (log-)infiniment divisible, les cumulants du propagateur sont aussi, lorsqu'ils existent, les coefficients de Kramers-Moyal.

Remarque : si on remplace $\partial P_a/\partial n$ par $\partial P_a/\partial \ln a$, tous les $D^{(k)}$ sont remplacés par $D^{(k)}.\partial n/\partial \ln a$.

Ce paragraphe 4.2 nous a permis de mettre en évidence l'équivalence entre un propagateur de cascade log-normale et une équation de Fokker-Planck pour décrire l'évolution de distributions P_s. Dans le cas général (non log-normal), nous avons établi la correspondance entre les cumulants C_k du propagateur d'une cascade log-infiniment divisible et les coefficients $D^{(k)}$ du développement de Kramers-Moyal. L'étape naturelle suivante passe par l'équation de Langevin qui constitue un autre point de départ pour aboutir à l'équation de Fokker-Planck. Une fois encore une structure de semi-groupe apparaît...

4.3 Equation de Langevin, semi-groupes et cascades log-infiniment divisibles

Nous nous plaçons à présent *en amont* de l'équation de Fokker-Planck, en considérant l'équation de Langevin. Signalons au passage les travaux de Marcq & Naert [107] sur

$\ln \varepsilon_r$ en turbulence. Nous allons rappeler comment apparaît une structure de *semi-groupe* accompagnée de son *générateur* à la fois dans une équation différentielle stochastique (Langevin) et dans l'équation aux dérivées partielles associée (Fokker-Planck).

4.3.1 Equation de Langevin et semi-groupes

Définition. Soit $B(t)$ une force de Langevin, c'est-à-dire un processus stochastique tel que

(i) $\langle B(t) \rangle = 0$,

(ii) $\langle B(t)B(t') \rangle = \delta(t - t')$.

L'*équation de Langevin* s'écrit par définition

$$\dot{X} = -\gamma X + \sigma B(t) \tag{III.134}$$

◁

Le problème de Cauchy stochastique associé peut aussi s'écrire

$$\begin{cases} dX &= -\gamma X\, dt + \sigma dB \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \tag{III.135}$$

Nous savons que l'équation de Langevin où $B(t)$ est le mouvement brownien standard décrit le même processus de Markov dit de Ornstein-Uhlenbeck que l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial X} XP + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \tag{III.136}$$

qui est du type (III.120). En conservant l'hypothèse que $B(t)$ est le mouvement brownien standard, on peut s'intéresser au problème de Cauchy stochastique plus général suivant [177] (équation de Langevin non linéaire) :

$$\begin{cases} dX &= \mu(X)\, dt + \sigma(X) dB \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \tag{III.137}$$

où $\mu(X)$ et $\sigma(X)$ ont de "bonnes" propriétés de régularité et de croissance modérée, et X_0 admet une variance. La solution $X_x(t)$ au sens de Itô[19] du problème (III.137) avec $X_0 = x$ est appelée *processus de diffusion homogène.*

Proposition. [177] Soit φ une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, on note $\mathcal{G}_t\varphi$ l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$\mathcal{G}_t\varphi(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_x(t))\right] \tag{III.138}$$

Alors

[19] Il existe deux conventions courantes d'interprétation des équations du type (III.137) : celle de Stratonovich, et celle de Itô.

(i) L'application $\mathcal{G}_t\varphi$ est continue et bornée.

(ii) $\mathcal{G}_t\varphi$ converge uniformément vers φ quand t tend vers 0^+.

(iii) $\forall\, s,\, t \geq 0, \quad \mathcal{G}_{s+t}\varphi = \mathcal{Q}_s\mathcal{G}_t\varphi = \mathcal{G}_t\mathcal{G}_s\varphi$ ◁

Les propriétés énoncées ci-dessus font de la famille d'opérateurs linéaires $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ un *semi-groupe*. C'est ce semi-groupe qui décrit l'évolution inhérente à l'équation (III.137). La propriété (iii) découle du caractère markovien et de l'homogénéité. Sous les hypothèses du théorème de Hille-Yosida (voir par exemple [33, 69, 178]), tout semi-groupe admet un *générateur* qui est formellement sa dérivée logarithmique (voir 1.1.3). Dans le cas du processus de diffusion, le générateur du semi-groupe associé est l'opérateur $\mathcal{U}$ (à rapprocher de $\mathcal{U}_{FP}$ du 4.1.4) tel que pour toute fonction φ deux fois continûment différentiable et bornée

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}_t\varphi = \mathcal{U}\mathcal{G}_t\varphi = \mathcal{G}_t\mathcal{U}\varphi \tag{III.139}$$

avec

$$\mathcal{U}\varphi(x) = -\frac{\partial}{\partial x}[(\mu(x) + \sigma'(x)\sigma(x))\varphi(x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2(x)\varphi(x)] \tag{III.140}$$

Notons $f(x,t) = \mathcal{G}_t\varphi(x) = \mathbb{E}\,[\,\varphi(X_x(t))\,]$. Alors $f(x,t)$ est solution du problème différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x} & = & \mathcal{U}f(x,t) \\ f(x,0) & = & \varphi(x). \end{array}\right. \tag{III.141}$$

Une autre interpétation possible de la relation (III.139) porte sur la probabilité de transition d'un processus de Markov. Sous des hypothèses de régularité suffisante de μ et σ, on démontre que la variable aléatoire $X_x(t)$ admet une densité, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$. Supposons que ce soit le cas et notons $W_x(X,t)$ cette densité. Pour toute fonction φ continue bornée elle vérifie

$$\mathbb{E}\,[\,\varphi(X_x(t))\,] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, W_x(y,t)\, dy \tag{III.142}$$

De plus on a

$$\lim_{t\to 0^+} W_x(y,t) = \delta_x(y)$$

où δ_x est la masse de Dirac au point x. Des équations (III.139) et (III.140) on déduit l'équation de Fokker-Planck ou équation de Kolmogorov directe [85]

$$\frac{\partial W_x(X,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X}\left[\mu(X) + \frac{1}{2}\sigma'(X)\sigma(X)\right] W_x(X,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left[\sigma(X)^2\right] W_x(X,t). \tag{III.143}$$

La famille de densité $\{W_x(X,t)\}$ constitue un système fondamental de solutions ou *noyau* fondamental. On obtient la solution générale par convolution avec une fonction quelconque, condition initiale.

Nous venons de rappeler le lien entre une *approche de type Langevin* avec mouvement brownien standard et *l'équation de Fokker-Planck*[20] à travers un *semi-groupe* et son *générateur*. D'après le théorème 2 page 65, dans le cas où ce semi-groupe est un semi-groupe de convolution, il existe une distribution infiniment divisible associée–on pourra la définir par la donnée de $H(q)$ qui se lit comme une représentation de $\mathcal{U}$.

4.3.2 Equation de Langevin et cascades log-infiniment divisibles

Nous avons vu dans le paragraphe 4.2 qu'une cascade log-normale menait aussi à une équation de Fokker-Planck, et que plus généralement un développement de Kramers-Moyal pouvait être très simplement associé aux cascades infiniment divisibles (lorsque les cumulants de tous ordres existent). Nous nous intéressons maintenant au lien entre cascade log-infiniment divisible et équation de Langevin. Lorsque les coefficients $\mu(X)$ et $\sigma(X)$ du paragraphe précédent prennent une forme particulière, l'équation de Langevin décrit une évolution *multiplicative*.

A cet égard, nous trouvons des éléments très instructifs dans le Risken [141], p.45-48 et dans le Van Kampen [85], p.230. Tous deux font le lien avec l'équation de Langevin associée. L'ouvrage de Risken, p.45, nous signale que l'équation de Langevin

$$\dot{\xi} = C_1\xi + \sqrt{\frac{C_2}{2}}\xi L(t) \tag{III.144}$$

où C_1 et $C_2(> 0)$ sont des constantes et $L(t)$ est le mouvement brownien standard, est une version simplifiée du problème classique de Kubo (oscillateur à fréquence bruitée). L'équation de Fokker-Planck équivalente (p.48) s'écrit :

$$\frac{\partial \underline{P_s}}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(C1 + \frac{C_2}{2})\xi \, \underline{P_s}\right] + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\frac{C_2}{2}\xi^2 \, \underline{P_s}\right] \tag{III.145}$$

Nous reconnaissons l'exacte jumelle de l'équation (III.126). Le terme $\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{C_2}{2}\xi \, \underline{P_s}$ s'interprète habituellement comme une dérive parasite due au bruit.

De son côté, Van Kampen [85], p.230, nous propose une méthode systématique pour transformer une équation de Langevin non linéaire en une équation de Langevin linéaire. Soit l'équation de Langevin non linéaire

$$\dot{\xi} = A(\xi) + \sqrt{\frac{C_2}{2}}\, C(\xi)L(t) \tag{III.146}$$

On parle dans ce cas de *bruit multiplicatif*. On peut se ramener au cas linéaire en divisant l'équation par $C(\xi)$, et en effectuant le changement de variable

$$y = \int \frac{d\xi}{C(\xi)}, \qquad C_1(y) = \frac{A(\xi)}{C(\xi)}, \qquad P_s(y) = \underline{P_s}(\xi)C(\xi). \tag{III.147}$$

[20] Il faut bien se souvenir qu'en toute rigueur on parle d'équation de Fokker-Planck lorsqu'on s'intéresse à des probabilités de transition. L'équation est aussi vérifiée par les distributions $P(X,t)$ du processus lui-même. Nous insistons sur ce point car il est important de distinguer pour quelle quantité on écrit une équation de Fokker-Planck.

On montre alors que l'équation (III.146) est équivalente à

$$\frac{\partial P_s}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[C_1(y) P_s(y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{C_2}{2} P_s(y) \right] \tag{III.148}$$

Dans le cas où $A(\xi) = C_1\xi$ et $C(\xi) = \xi$, on pose $y = \ln \xi$, $C_1(y) = C_1 = cste$, $\Pi(y) = \xi P(\xi)\ldots$ et l'équation (III.148) est équivalente à (III.125).

Remarque : une résolution directe par des méthodes de calcul stochastique de l'équation de Langevin non linéaire correspondant au propagateur log-normal est présentée dans [11].

5 Conclusion

La notion de semi-groupe constitue le fil rouge de ce chapitre. Elle nous a mené des semi-groupes de convolution aux cascades log-infiniment divisibles puis aux processus de Markov et aux équations de Fokker-Planck et de Langevin. Nous avons remarqué que les distributions infiniment divisibles apparaissent très fréquemment dans les travaux sur les aspects statistiques de la turbulence.

Nous nous sommes intéressés aux multiplicateurs (*breakdown coefficients*) souvent évoqués en turbulence. Il s'agit ici d'un élément d'une réflexion plus vaste sur le lien entre cascades multiplicatives et cascades log-infiniment divisibles (signalons au passage l'article de G.M. Molchan [113]) . Notre conviction est que la définition habituelle des multiplicateurs W_{r_1,r_2} relève d'une mauvaise intuition du plan temps-échelle. Si elle peut se justifier par la recherche de lois universelles en turbulence (telles que la *First universality hypothesis* de K62), l'information qu'on espère en tirer ne sera que parcellaire et difficile à exploiter. Cependant, nous n'excluons pas, bien au contraire, une connexion forte entre cascades log-infiniment divisibles et cascades multiplicatives. C'est une direction de recherche essentielle dans laquelle plusieurs aspects demeurent mal compris.

Nous avons ensuite insisté sur le rôle très particulier joué par les cascades possédant un noyau log-Poisson composé. Une analogie entre le modèle de propagation d'un rayon lumineux dans la Voie Lactée dû à Ambarzumian [10] et la cascade d'énergie à travers les échelles en turbulence nous a amenés à proposer une vision originale du phénomène d'intermittence statistique en turbulence. Nous formulons notre interprétation en termes de taux de transfert d'énergie à travers un nombre aléatoire de structures dissipatives réparties entre les échelles d'injection et les échelles dissipatives.

La fonction $H(q)$ est associée à la distribution de ce taux de transfert. Dans le modèle K41, il s'agit d'une distribution de Dirac concentrée en $\beta = 1$. L'énergie est intégralement transférée sans perte des grandes échelles d'injection jusqu'aux échelles les plus petites où elle est dissipée dans sa totalité. Le modèle log-Poisson propose d'utiliser une distribution de Dirac en $\beta = Cte < 1$. On considère alors que la dissipation est présente à toutes les échelles, mais qu'elle est due à un seul et unique type de structures dissipatives, ce qui paraît intuitivement contradictoire avec la complexité des écoulements turbulents.

Les modèles log-Poisson composés autorisent le taux de transfert à fluctuer aléatoirement ($\beta \neq Cte$).

Quelle que soit la distribution associée à $H(q)$, l'invariance d'échelle ($n(a) \propto \ln a$) est reliée à une distribution homogène en échelle des structures dissipatives. En abandonnant l'invariance d'échelle, on rend compte de la variation de la densité en structures dissipatives, plus faible aux grandes échelles d'injection, plus grande aux échelles dissipatives. $n(a)$ s'interprète comme un nombre moyen de structures dissipatives entre deux échelles.

Enfin, nous clarifions les liens entre cascades log-infiniment divisibles et processus de Markov en échelle. Nous explicitons formellement la correspondance entre coefficients de Kramers-Moyal et cumulants du propagateur. Nous montrons surtout comment la notion de semi-groupe permet de réunir (sous certaines conditions) les cascades log-infiniment divisibles, l'équation de Langevin et l'équation de Fokker-Planck.

Chapitre IV
Lois d'échelle :
détection, estimation

IV. Lois d'échelle : détection, estimation

La modélisation de données expérimentales par des lois d'échelles passe fatalement par trois étapes essentielles. Dans un premier temps, il faut détecter la présence de ces lois d'échelle. Ensuite le modèle proposé doit être validé, ce qui suggère l'utilisation d'un test. Enfin, l'estimation des paramètres du modèle permettra de quantifier plus ou moins précisément les caractéristiques essentielles des données ; de plus il est en général souhaitable que cette étape d'estimation soit à la fois robuste et rapide. Nous présentons dans ce chapitre une étude d'estimateurs à base d'ondelettes pour l'analyse des lois d'échelle. La partie 1 vise d'abord à caractériser un estimateur des exposants $\zeta(q)$ du "multiscaling" (voir Ch. **II**), avec le souci d'accompagner l'estimation d'un intervalle de confiance. Dans la partie 2, nous proposons et étudions des estimateurs pour les quantités $H(q)$ et $n(a)$ caractérisant une cascade log-infiniment divisible ; nous présentons les résultats obtenus sur des données de télétrafic informatique. La partie 3 s'intéresse au cas particulier de l'estimation du spectre multifractal des mouvements linéaires fractionnaires stables[1] (processus α-stables, appelés L.F.S.M.).

1 Invariance d'échelle et estimateurs à base d'ondelettes

La motivation essentielle du travail présenté dans cette partie est l'estimation des exposants $\zeta(q)$ de lois d'échelle, mais surtout l'estimation conjointe d'un intervalle de confiance pour la valeur obtenue. Même approximatif, l'intervalle de confiance est un élément indispensable à l'exploitation de résultats auxquels on ne saurait quel crédit accorder sinon. La comparaison/confrontation entre différents résultats n'est possible que si l'on a une idée au moins approchée des barres d'erreur associées. C'est pourquoi nous proposons ici une méthode d'estimation des intervalles de confiance sur les estimations des exposants $\zeta(q)$.

1.1 Ondelettes et lois d'échelle

Nous avons déjà eu un aperçu des qualités essentielles des transformées en ondelettes dans la partie **II**.2.1. Trois propriétés vont jouer ici un rôle clé.

La première est la **reproduction des lois d'échelle** par les coefficients d'ondelette. Une base d'ondelettes étant obtenues par dilatation de l'ondelette mère, les coefficients d'ondelette d'un processus X reproduisent parfaitement les lois d'échelle qu'il contient,

[1] Les moments d'ordre q d'une variable α-stable n'existent que pour $-1 < q < \alpha$, ce qui fait apparaître des problèmes spécifiques.

qu'il s'agisse d'auto-similarité, de dépendance longue, de régularité locale, ou d'un comportement multifractal [23, 119, 15, 57, 59, 72, 131, 163]. On retiendra que pratiquement toutes les propriétés observables sur les accroissements d'un processus, le sont sur sa transformée en ondelettes.

La deuxième propriété importante et très pratique est l'effet de **"stationnarisation"** des coefficients en ondelette. Lorsqu'on se restreint à l'étude des processus à accroissements stationnaires, les coefficients d'ondelette constituent à chaque échelle des processus stationnaires. Mieux, pour un processus à accroissements d'ordre $p \geq 1$ stationnaires[2] lorsque le nombre N de moments nuls de l'ondelette est supérieur ou égal à p, les coefficients d'ondelette forment à chaque échelle un processus stationnaire [1]. Ainsi nous pourrons utiliser des moyennes temporelles pour estimer des moyennes d'ensemble. De surcroît, la transformée en ondelette est insensible aux tendances polynomiales d'ordre $\leq N-1$. Pour N suffisamment grand, les coefficients en ondelette ne rendront donc compte que des fluctuations, sans être sensible à une dérive douce (polynomiale) parasitant éventuellement le signal.

La troisième propriété est dû à l'**effet de décorrélation** des coefficients d'ondelette. Pour la transformée en ondelette discrète des processus autosimilaires gaussiens à accroissements stationnaires, on peut montrer que [72, 163]

$$\mathbb{E}\,[\, d_X(j,k) d_X(j,k')\,] \simeq |\, k-k'\,|^{2H-2N}, \quad |\, k-k'\,| \to +\infty \qquad \text{(IV.1)}$$

En particulier, dès que le nombre de moments nuls $N > H+1/2$, les coefficients d'ondelette $d_X(j,.)$ ne présentent plus de dépendance longue. Cette structure de corrélation reste valable pour les processus auto-similaires à accroissements stationnaires non-gaussiens de variance finie. L'étude de cet effet de cet effet de décorrélation pour les ordres supérieurs à 2 reste à faire. Nous ferons par la suite l'hypothèse (idéale) d'exacte indépendance entre tous les coefficients d'ondelette discrète $d_X(j,k)$. Cette hypothèse, bien qu'évidemment trop optimiste, s'avère tout à fait pertinente.

Toutes ces propriétés nous incitent à étudier les lois d'échelle à partir d'une analyse multirésolution d'un processus à accroissements stationnaires. Les coefficients d'ondelette reproduisent ces lois d'échelle. Comme ils forment des processus stationnaires à chaque échelle, nous pourrons utiliser des moyennes temporelles pour estimer des espérances mathématiques. Enfin, l'indépendance (supposée) des coefficients $d_X(j,k)$ entre eux nous permet de proposer une estimation convenable des intervalles de confiance.

1.2 Diagrammes log-échelles

Dans les paragraphes 1.2 à 1.4, nous nous intéressons à l'estimation des exposants $\zeta(q)$ tels que (fig. IV.1) :

$$\mathbb{E}[\,|\, d_X(j,k)\,|^q\,] \propto 2^{j\zeta(q)}, \quad j_1 \leq j \leq j_2 \qquad \text{(IV.2)}$$

Le choix de la gamme $[j_1, j_2]$ dans laquelle on effectue l'estimation est difficile à optimiser de façon systématique. Nous laissons cette question de côté, et supposons la gamme d'échelle

[2] Les accroissements d'ordre 2 sont les accroissements des accroissements ; en considérant de manière récurrente les accroissements des accroissements. . . on définit les accroissements d'ordre p.

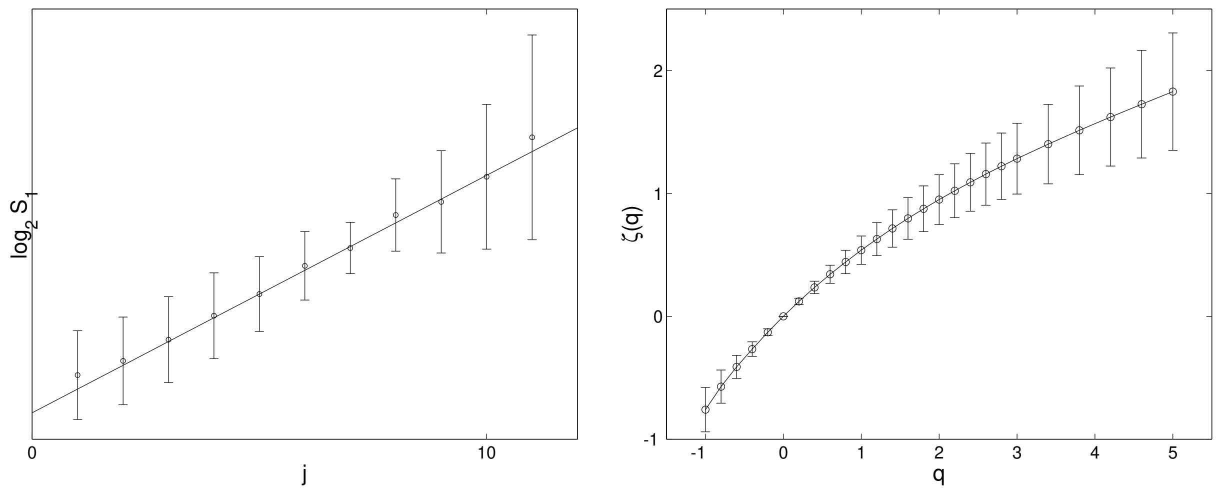

Fig. IV.1: Exemple de diagramme log-échelle, et exposants $\zeta(q)$ obtenus, affectés de leurs intervalles de confiance à 95%.

$[j_1, j_2]$ prédéterminée. On définit les fonctions de structure ondelette (voir **II**.2.4) pour tout q par

$$S_q(j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j,k)|^q, \tag{IV.3}$$

où n_j est le nombre de coefficients d'ondelette à l'échelle j. Rappelons que si n est la longueur de la réalisation étudiée, $n_j \propto 2^{-j} n$. Les coefficients $d_X(j, .)$ formant un processus stationnaire, on peut aussi voir $S_q(j)$ comme un estimateur de $\mathbb{E}[\,|d_X(j,k)|^q\,]$. La méthode d'estimation de $\zeta(q)$ la plus simple suggérée par (IV.2) consiste alors à effectuer une régression linéaire dans un diagramme log-échelles $\log_2 S_q$ vs $j = \log_2(a)$. On pose

$$Z_q(j) \;=\; \log_2 S_q(j). \tag{IV.4}$$

L'estimateur $\hat{\zeta}(q)$ issu de la régression linéaire est décrit par

$$\hat{\zeta}(q) \;=\; \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \; Z_q(j) \tag{IV.5}$$

où les poids w_j doivent vérifier

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=j_1}^{j_2} j\, w_j & = & 1 \\ \displaystyle\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j & = & 0. \end{array} \right. \tag{IV.6}$$

On utilisera soit une régression linéaire non-pondérée, soit une régression linéaire pondérée (par n_j ou $\mathrm{var}(Z_q(j))$). On estime alors la variance de cet estimateur par

$$\mathrm{var}(\hat{\zeta}(q)) \;=\; \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j^2 \; \mathrm{var}(Z_q(j)) \tag{IV.7}$$

en supposant vraie l'hypothèse d'indépendance entre les coefficients d'ondelette. Les variances $\mathrm{var}(Z_q(j))$ seront selon les cas calculées analytiquement, tabulées numériquement, ou estimées. Grâce à un argument de normalité asymptotique, on pourra en déduire une estimation d'un intervalle de confiance (à 95% dans notre cas). Le biais est défini par

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \left(\mathbb{E}[Z_q(j)] - \underbrace{\log_2 \mathbb{E}[\mid d_X(j,k) \mid^q]}_{\zeta(q)j+b_q}\right) \tag{IV.8}$$

Enfin, pour tester l'adéquation du modèle, on utilise la variable

$$F = \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{\left(Z_q(j) - (\hat{\zeta}(q)j + \hat{b}_q)\right)^2}{\mathrm{var}(Z_q(j))} \tag{IV.9}$$

où $\hat{\zeta}(q)$ et $\hat{b}_q$ sont respectivement les pente et ordonnée à l'origine estimées par la régression linéaire. On applique à F un test du χ^2 à $[(j2 - j_1 + 1) - 2]$ degrés de liberté, en se fondant encore une fois sur l'hypothèse d'indépendance des coefficients d'ondelette entre eux. On calcule alors la probabilité Q que la variable F prenne une valeur supérieure à celle effectivement observée, ce qui pourrait constituer la base d'un test de la propriété d'invariance d'échelle.

1.3 Exemple de l'estimation du paramètre d'auto-similarité H pour un processus gaussien

Nous nous servons de cet exemple "simple" pour préparer le paragraphe suivant et mettre en évidence les difficultés qui peuvent surgir dans le cadre plus général. Nous renvoyons le lecteur à la référence [5] pour une présentation détaillée.

L'estimateur que nous présentons maintenant est suggéré par la relation :

$$\mathbb{E}[\mid d_X(j,k) \mid^q] = 2^{jqH}\, \mathbb{E}[\mid d_X(0,k) \mid^q], \quad \forall q / \ \mathbb{E}[\mid d_X(j,k) \mid^q] < +\infty. \tag{IV.10}$$

On cherche alors à estimer H grâce à :

$$\hat{H}_q = \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j\, Z_q(j)}_{\widehat{qH}} \tag{IV.11}$$

Dans le cas d'un processus gaussien, pour $q = 2$, on peut calculer analytiquement le biais et la variance de cet estimateur (sous hypothèse d'indépendance des coefficients d'ondelette). On montre ainsi que biais et variance se comportent en $1/n$, où n est la longueur de la réalisation étudiée. De plus, il est alors facile de corriger le terme de biais, et de donner analytiquement un intervalle de confiance sur $\hat{H}_2$. Enfin, on peut optimiser l'estimation en effectuant une régression linéaire pondérée par $w_j \propto 1/\mathrm{var}(Z_2(j))$, où $\mathrm{var}(Z_2(j))$ est calculée analytiquement.

Lorsqu'on s'intéresse aux estimateurs $\hat{H}_q$ pour $q \neq 2$, les calculs analytiques ne permettent plus d'obtenir que des résultats approchés (développements limités en $1/n$). Néanmoins, une démarche tout à fait similaire à celle utilisée pour $q = 2$ est possible pour optimiser l'estimateur. On observe alors que les estimateurs $\hat{H}_q$, $\hat{H}_2$ est optimal, au sens où l'erreur quadratique moyenne (variance + carré du biais) est minimale. Il n'est pas étonnant que la valeur $q = 2$ joue un rôle particulier dans le cas d'un processus gaussien, puisque tous les moments sont déterminés par la variance.

Nous voyons poindre les difficultés que pourra soulever l'estimation non plus du seul paramètre H mais des exposants $\zeta(q)$ du multiscaling, dans un cadre éventuellement non-gaussien.

1.4 Estimation des exposants $\zeta(q)$ du "multiscaling"

Nous étudions ici l'estimateur des exposants $\zeta(q)$ présenté au 1.2. Dans le même esprit qu'au 1.3, on cherche à obtenir idéalement un estimateur non-biaisé, de variance minimale. Nous présentons d'abord les résultats obtenus sous l'hypothèse que la distribution des $d_X(j,k)$ est gaussienne(§ 1.4.1). Nous proposons ensuite une méthode d'estimation sans a priori dans le cas où les coefficients d'ondelette sont éventuellement non-gaussiens (§ 1.4.2). La figure IV.8 p. 133 présente les résultats obtenus sur l'exemple d'un mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal. La figure V.13 p. 167 montre les résultats obtenus sur les fonctions de structure en turbulence.

1.4.1 Cas gaussien

Nous nous concentrons dans ce paragraphe sur l'estimation d'exposants $\zeta(q)$, sous les hypothèses suivantes :

H1. $\mathbb{E}[\,|\, d_X(j,k)\,|^q\,] \;=\; a_q\, 2^{j\zeta(q)}, \quad j_1 \le j \le j_2,$

H2. les $d_X(j,k)$ sont indépendants[3] et identiquement distribués selon une loi normale[4] à chaque échelle.

L'estimation est alors fondée sur la relation (IV.2) que nous réécrivons sous la forme

$$\log_2 \mathbb{E}[\,|\, d_X(j,k)\,|^q\,] \;=\; j\zeta(q) \;+\; b_q, \quad j_1 \le j \le j_2 \tag{IV.12}$$

On considère alors l'estimateur évoqué dans le paragraphe 1.2 :

$$\hat{\zeta}(q) \;=\; \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j\; Z_q(j) \tag{IV.13}$$

[3] Nous utilisons systématiquement l'hypothèse quasi-indispensable d'indépendance des coefficients $d_X(j,k)$.

[4] Dans le cadre du multiscaling, cette hypothèse est nécessairement une approximation. Nous avons déjà observé qu'on pouvait associer au comportement de multiscaling une évolution des distributions des coefficients d'ondelette à travers les échelle, donc avec j.

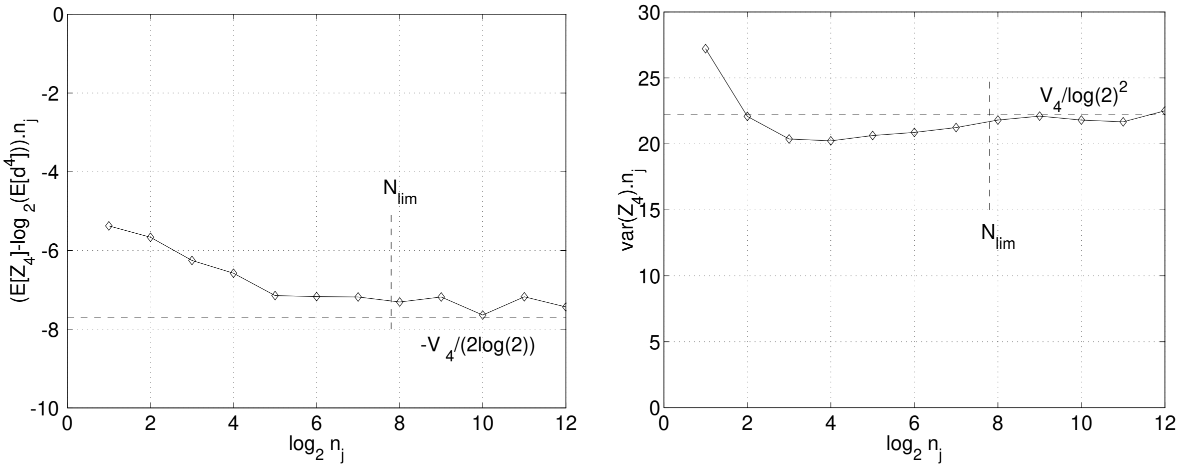

Fig. IV.2: Exemple de tabulation de $g_q(n_j)$ et $\sigma_q^2(n_j)$ pour $q = 4$. Ces valeurs sont obtenues numériquement à partir de 30000 réalisations indépendantes d'une variable aléatoire gaussienne. On les utilise uniquement lorsque $n_j \le N_{lim}$. Tant que $n_j \geq N_{lim}$ le développement (IV.14) est valable.

Pour déterminer le biais et la variance de cet estimateur, nous devons connaître $\mathbb{E}[Z_q(j)]$ et $\mathrm{var}(Z_q(j))$.

Pour les grandes valeurs de n_j, on montre assez facilement que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{E}[\ Z_q(j)\ ] & \simeq & \log_2 \mathbb{E}[\mid d_X(j,k)\mid^q] \underbrace{-\frac{V_q}{2\ln 2 n_j}}_{g_q(n_j)} \\ \mathrm{var}(Z_q(j)) & \simeq & \underbrace{\frac{V_q}{(\ln 2)^2 n_j}}_{\sigma_q^2(n_j)} \end{array}\right. \tag{IV.14}$$

avec

$$\begin{aligned} V_q &= \frac{\mathrm{var}(\mid d_X\mid^q)}{(\mathbb{E}[\mid d_X \mid^q])^2} \\ &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(\frac{q+1}{2})^2} - 1. \end{aligned} \tag{IV.15}$$

La quantité V_q est indépendante de la variance des coefficients, et n'est caractéristique que de la forme gaussienne de la distribution. Les développements limités (IV.14) sont valables si

$$n_j \gg \frac{V_q}{(\ln 2)^2}. \tag{IV.16}$$

En pratique, les relations (IV.14) sont très bien vérifiées pour $n_j \geq N_{lim} = 10V_q/(\ln 2)^2$. Pour $q = 2$, les résultats analytiques évoqués dans le paragraphe précédent restent valables, et nous pourrons les utiliser.

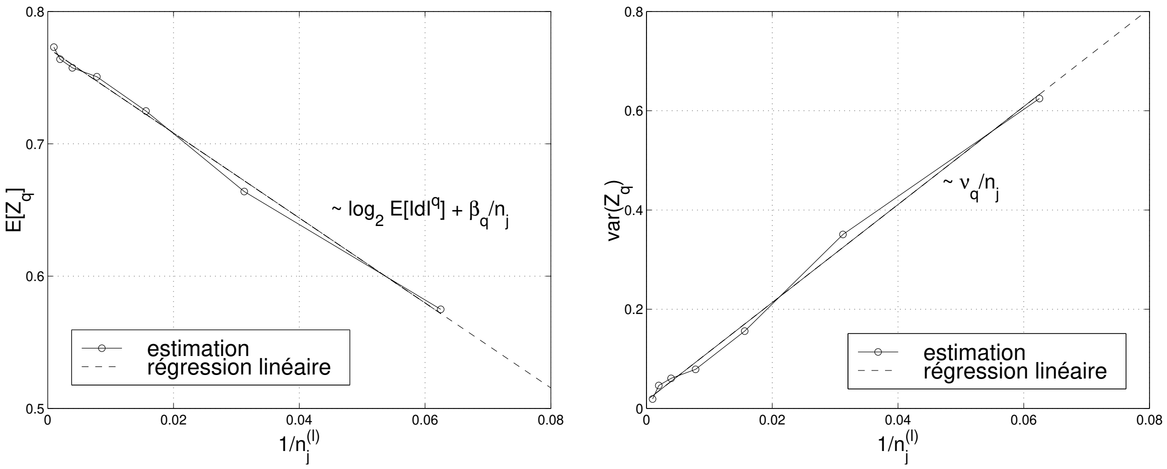

Fig. IV.3: Estimation sans a priori de (à g.) $\mathbb{E}[Z_q(j)] \simeq \log_2 \mathbb{E}[|d_X(j,k)|^q] + \beta_q/n_j$ et (à dr.) de $\mathrm{var}(Z_q(j)) \simeq \nu_q/n_j$ en utilisant (IV.18) pour $q = 3$.

Or le nombre de coefficients disponibles à chaque échelle est tel que $n_j \propto 2^{-j}n$, et décroît exponentiellement lorsque j croît. Nous risquons donc d'être confrontés plus souvent qu'on ne le souhaite à une situation où les approximations (IV.14) ne sont plus correctes. Nous n'avons dans ce cas pas d'autre solution que de tabuler les termes de biais $g_q(n_j)$ et de variance $\sigma_q^2(n_j)$ liés à Z_q pour un ensemble de valeurs de q et de $n_j \leq N_{lim} = 10V_q/(\ln 2)^2$. Les valeurs tabulées sont obtenues pour chaque n_j en effectuant un grand nombre de tirages de n_j variables gaussiennes indépendantes $(x_k^{(i)})_{k=1,n_j}$, $1 \leq i \leq N_{tirages}$. On calcule $Z_q^{(i)} = \log_2(1/n_j \sum \mid x_k^{(i)} \mid^q)$ pour chaque tirage. La moyenne et la variance de $Z_q^{(i)}$ sur l'ensemble des tirages de longueur n_j fournit une très bonne approximation de $\mathbb{E}[\,Z_q\,]$ et $\mathrm{var}(Z_q)$. L'opération est répétée pour un ensemble de valeurs de q et de n_j convenablement réparties.

L'estimateur $\hat{\zeta}(q)$ utilisant les $Z_q(j)$ est asymptotiquement non-biaisé, le biais décroissant asymptotiquement en $1/n$. Grâce aux observations que nous venons de faire, nous pouvons encore améliorer ce comportement en remplaçant $Z_q(j)$ par

$$\bar{Z}_q(j) \;=\; Z_q(j) \;-\; g_q(n_j) \tag{IV.17}$$

où $g_q(n_j)$ est, selon les cas, approché grâce à (IV.14) ou tabulé numériquement pour $n_j \leq 10V_q/(\ln 2)^2$. De même, on utilisera pour la variance de $\bar{Z}_q$ la valeur donnée par $\sigma_q^2(n_j)$ dans (IV.14) ou sa version tabulée numériquement.

1.4.2 Cas non-gaussien

Nous abandonnons maintenant l'hypothèse **H2** précédente en ne supposant plus une distribution normale des coefficients $d_X(j,k)$. Nous supposons alors un comportement similaire à (IV.14) pour $Z_q(j)$, de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\ Z_q(j)\ ] & \simeq & \log_2 \mathbb{E}[\mid d_X(j,k) \mid^q] + \underbrace{\dfrac{\beta_q}{n_j}}_{g_q(n_j)} \\ \mathrm{var}(Z_q(j)) & \simeq & \underbrace{\dfrac{\nu_q}{n_j}}_{\sigma_q^2(n_j)} \end{cases} \tag{IV.18}$$

Nous avons abandonné tout a priori sur les distributions des $d_X(j,k)$. Par conséquent, l'estimation de $g_q(n_j)$ et de $\sigma_q^2(n_j)$ à chaque octave j est inévitable. La méthode que nous avons mise en œuvre est la suivante. A chaque octave j on découpe l'ensemble des n_j coefficients d'ondelette en l sous-ensembles disjoints de $n_j^{(l)} = n_j/l$ coefficients. Pour une valeur de l, on peut alors estimer $\mathbb{E}[\ Z_q^{(l)}(j)\ ]$ et $\mathrm{var}(Z_q^{(l)}(j))$ à partir des valeurs de Z_q obtenues sur les sous-ensembles : la moyenne et la variance de ces valeurs donnent une estimation de $\mathbb{E}[\,Z_q\,]$ et de $\mathrm{var}(Z_q)$ calculés avec $n_j^{(l)}$ coefficients. On effectue cette opération pour plusieurs valeurs de l, c'est-à-dire pour plusieurs tailles $n_j^{(l)}$ des sous-ensembles. L'ordonnée à l'origine et la pente d'une régression linéaire dans un diagramme $\mathbb{E}[\ Z_q^{(l)}(j)\ ]$ en fonction de $1/n_j^{(l)}$ fournissent respectivement une estimation de $\log_2 \mathbb{E}[\mid d_X(j,k) \mid^q]$ et une estimation de β_q, donc de $g_q(n_j)$. De même, une régression linéaire sur $\mathrm{var}(Z_q^{(l)}(j))$ en fonction de $1/n_j^{(l)}$ fournit une estimation de ν_q donc de $\sigma_q^2(n_j)$. La figure IV.3 résume cette méthode.

Comme dans le cas gaussien, nous pouvons alors utiliser $\bar{Z}_q$ au lieu de Z_q pour atténuer le biais, et proposer un intervalle de confiance grâce aux valeurs estimées de $\mathrm{var}(Z_q(j))$ reportées dans (IV.7). Le recours à une tabulation pour les petits n_j est exclu puisque nous ne connaissons pas a priori les distributions des $d_X(j,k)$. Aussi faudra-t-il prendre garde à disposer d'une statistique suffisante (n_j assez grand) à chaque échelle $j_1 \leq j \leq j_2$ pour mettre en œuvre cette méthode.

Enfin, insistons sur le rôle crucial de la gamme d'échelles $j_1 - j_2$ retenue pour appliquer la procédure d'estimation. Nous ne disposons d'aucun algorithme de sélection automatique lorsque les lois d'échelle étudiées ne sont valables que dans une gamme restreinte. C'est en général la physique (au sens large du terme) du système ainsi que l'œil exercé de "l'expert" qui déterminent le choix des échelles j_1 et j_2. Il s'agit d'éviter les concessions lors de cette étape préalable. Optimiser automatiquement le paramètre F défini par (IV.9) représente une solution possible.

Remarque : les coefficients β_q et ν_q sont très sensibles à la nature de la distribution des $d_X(j,k)$, réclamant en général une statistique plus importante que dans le cas gaussien.

2 Cascades log-infiniment divisibles : estimation de $H(q)$ et $n(a)$

Les méthodes d'estimations que nous décrivons ci-dessous peuvent être utilisées pour les différentes formes de transformées en ondelette (continue, discrète, maxima des modules). Nous les présentons d'abord de manière générale pour $T_X(a,t)$ (§ 2.1 à 2.3) avant de comparer les résultats obtenus avec chacune des transformées en ondelette.

Les relations caractéristiques d'une cascade log-infiniment divisibles sur les coefficients d'ondelette $T_X(a,t)$ sont (voir **II**.3) :

$$\ln \mathbb{E}|T_X(a,t)|^q = -H(q)\, n(a) + K_q \tag{IV.19}$$

$$\ln \mathbb{E}|T_X(a,t)|^q = \frac{H(q)}{H(p)} \ln \mathbb{E}|T_X(a,t)|^p + K_{p,q}, \quad \forall\, q,\, p, \tag{IV.20}$$

$$C_k^Y(a) = C_k^G\, n(a) + \beta_k \tag{IV.21}$$

$$C_k^Y(a) = \frac{C_k^G}{C_l^G} C_l^Y(a) + \beta_{l,k}, \quad \forall\, k,\, l, \tag{IV.22}$$

$$H(q) = -\sum_{k=1}^{\infty} C_k^G \frac{q^k}{k!} = -C_1^G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{C_1} \frac{q^k}{k!}. \tag{IV.23}$$

où $H(q) = -\ln \widetilde{G}(q)$. Ces relations suggèrent différents estimateurs permettant de décrire le couple (G,n) par $(H(q), n(a))$ ou $(C_k, n(a))$ par exemple. Nous décrivons ces estimateurs ci-dessous. Les résultats obtenus à partir de données expérimentales sont représentés figure IV.7 p. 131 (Internet), et figures V.15 p. 171 et V.16 p. 171 (turbulence).

2.1 Méthode des moments.

Estimation de $H(q)$. La relation (IV.20) suggère une méthode d'estimation de $H(q)/H(p)$ pour tout couple (p,q) grâce à une régression linéaire dans un diagramme de Z_q en fonction de Z_p. Ces diagrammes constituent une extension naturelle des diagrammes log-échelle aux situations non invariante d'échelle. En pratique, on fixe $p = Cte$, de sorte qu'on estime $\widehat{H}_M(q)$ tel que $\widehat{H}_M(p) = 1$ par la régression linéaire :

$$Z_q(j) \simeq \widehat{H}_M(q) Z_p(j) + \widehat{K}_{p,q} \tag{IV.24}$$

Nous utilisons ici l'indétermination de H et n à une constante multiplicative près pour choisir p à notre guise. En théorie, le choix d'une valeur particulière de p est sans importance. Cependant, plus le rapport q/p est différent de 1, moins Z_q et Z_p sont interdépendants, et meilleure est l'estimation. On fixe en général $p = 1$. Comme pour l'estimation des $\zeta(q)$, on peut associer un intervalle de confiance aux valeurs $\widehat{H}_M(q)$ estimées, ainsi qu'une mesure d'adéquation de modèle, en tenant compte du fait que $Z_q(j)$ et $Z_p(j)$ sont deux variables aléatoires [136]. Une méthode pour vérifier l'hypothèse d'une cascade log-infiniment divisible revient à tester la linéarité de la courbe $Z_q(a) = f(Z_p(a))$.

Estimation de $n(a)$. L'estimation $\hat{n}_M(a)$ de $n(a)$ repose sur la séparation des variables $H(q)n(a)$ dans (IV.19). Nous proposons l'estimateur suivant [46, 168] :

$$\hat{n}_M(a) = \left\langle \frac{Z_q(a) - \widehat{K}_{p,q}}{\widehat{H}_M(q)} \right\rangle_q + \nu_M \tag{IV.25}$$

où $< . >_q$ représente la moyenne simple sur les valeurs de q. La constante ν_M, liée à l'indétermination de $n(a)$ à une constante additive près, est arbitraire. On peut aussi proposer un intervalle de confiance sur $\hat{n}_M(a)$ grâce à

$$\widehat{\mathrm{var}}(\hat{n}_M(a)) = \mathrm{var}_q \left(\frac{Z_q(a) - \widehat{K}_{p,q}}{\widehat{H}_M(q)} \right) \tag{IV.26}$$

où var_q désigne un estimateur simple de la variance des estimées de $n(a)$ obtenues pour différentes valeurs de q (typiquement $0 \leq q \leq 6$).

2.2 Méthode des cumulants.

La méthode utilisant les cumulants est semblable à celle utilisant les moments. Elle est fondée sur les relations (IV.21) et (IV.22). On pourra ensuite revenir si l'on veut à $H(q)$ grâce à la relation (IV.23).

Estimation des C_k^G. La relation (IV.22) suggère une méthode d'estimation de C_k^G/C_l^G pour tout couple $(l, k) \in \mathbb{N}^{*2}$ grâce à une régression linéaire dans un diagramme de C_k^Y en fonction de C_l^Y. Nous notons C_k^Y le cumulant d'ordre k de $Y = \ln \mid T_X \mid$. Les cumulants C_k^Y sont estimés à partir de l'estimation des moments μ_k^Y d'ordre k de Y grâce aux relations [95] :

$$\begin{aligned} C_1^Y(a) &= \mu_1^Y(a), \\ C_2^Y(a) &= \mu_2^Y(a) - C_1^Y(a)^2, \\ C_3^Y(a) &= \mu_3^Y(a) - 3C_2^Y(a)C_1^Y(a) - C_1^Y(a)^3. \end{aligned} \tag{IV.27}$$

Estimer les moments ou cumulants du logarithme d'une quantité réclame beaucoup de statistique, d'autant plus que les coefficients d'ondelette T_X sont de moyenne nulle. Les difficultés apparaissent dès l'ordre 2... aucun espoir donc d'estimer correctement un cumulant d'ordre 4 ou 5 ici. Les cumulants $C_1^Y(a)$ sont évidemment les mieux estimés. Par conséquent, on utilise toujours des diagrammes de C_k^Y en fonction de C_1^Y pour estimer les C_k^G par la régression linéaire :

$$C_k^Y(a) \simeq \widehat{C_k^G}\, C_1^Y(a) + \widehat{\beta}_k \tag{IV.28}$$

On obtient ainsi les $\widehat{C_k^G}$ tels que $\widehat{C_1^G} = 1$ (nous utilisons ici encore l'indétermination de H et n à une constante multiplicative près).

On peut alors utiliser la relation (IV.23) pour donner la forme approchée de $H(q)$:

$$\widehat{H}_C(q) = -\sum_k \widehat{C_k^G}\, \frac{q^k}{k!} \qquad \text{avec par convention } \widehat{C_1^G} = 1. \tag{IV.29}$$

Estimation de $n(a)$. L'estimation $\hat{n}_M(a)$ de $n(a)$ repose sur la séparation des variables $C_k^G n(a)$ dans (IV.21). Nous proposons l'estimateur suivant [49] :

$$\hat{n}_C(a) = \left\langle \frac{C_k^Y(a) - \hat{\beta}_k}{\widehat{C_k^G}} \right\rangle_k + \nu_C \tag{IV.30}$$

où $< . >_k$ représente la moyenne simple sur les valeurs de k. La constante ν_C, liée à l'indétermination de $n(a)$ à une constante additive près, est arbitraire. On peut aussi proposer un intervalle de confiance sur $\hat{n}_C(a)$ grâce à

$$\widehat{\mathrm{var}}(\hat{n}_C(a)) = \mathrm{var}_k \left(\frac{C_k^Y(a) - \hat{\beta}_k}{\widehat{C_k^G}} \right) \tag{IV.31}$$

où var_k désigne un estimateur simple de la variance des estimées de $n(a)$ obtenues pour différentes valeurs de k. Cette méthode est très sensible à la mauvaise qualité des estimations de C_k^Y pour $k \geq 2$ (voir 2.4).

On pourra comparer les résultats des méthodes utilisant les moments de $\mid T_X \mid$ ou les cumulants de $Y = \ln \mid T_X \mid$ en imposant aux deux estimations des conventions cohérentes sur les constantes multiplicatives ($H(p)$, C_1^G) et additives (ν_M, ν_C) arbitraires :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \widehat{H}_M(q) & \Longleftrightarrow & \dfrac{\widehat{H}_C(q)}{\widehat{H}_C(p)} \\ \hat{n}_M(a) & \Longleftrightarrow & \widehat{H}_C(p)\, \hat{n}_C(a) + Cte \end{array} \right. \tag{IV.32}$$

L'étude des cumulants permet par exemple de quantifier l'écart au modèle log-normal pour lequel tous les cumulants d'ordre supérieur ou égal à 3 sont nuls ($C_k^G = 0,\ \forall k \geq 3$). Il n'est pas clair cependant du fait des difficultés d'estimation que ce soit le bon outil pour valider/invalider l'existence d'une cascade log-infiniment divisible (voir 2.4).

2.3 Déformation des distributions.

Lorsque les fonctions H et n qui définissent le propagateur sont estimées, on peut simuler l'évolution des distributions des coefficients d'ondelette à travers les échelles a (ou les octaves j). La figure IV.4 illustre cette observation à partir du signal de vitesse d'un jet turbulent ($R_\lambda = 600$, données de C. Baudet). Les distributions obtenues par application du propagateur se superposent presque parfaitement.

Remarque : S. Roux propose dans sa thèse [21, 142] une autre procédure d'estimation de H. Il s'agit d'une déconvolution à l'aide de la transformée de Fourier du propagateur qui est estimée directement pour différents coupes d'échelles de départ et d'arrivée a et a'. Plutôt que de comparer différents ordres q entre eux, cette méthode compare pour chaque valeur de q deux valeurs différentes de l'échelle, a et a'.

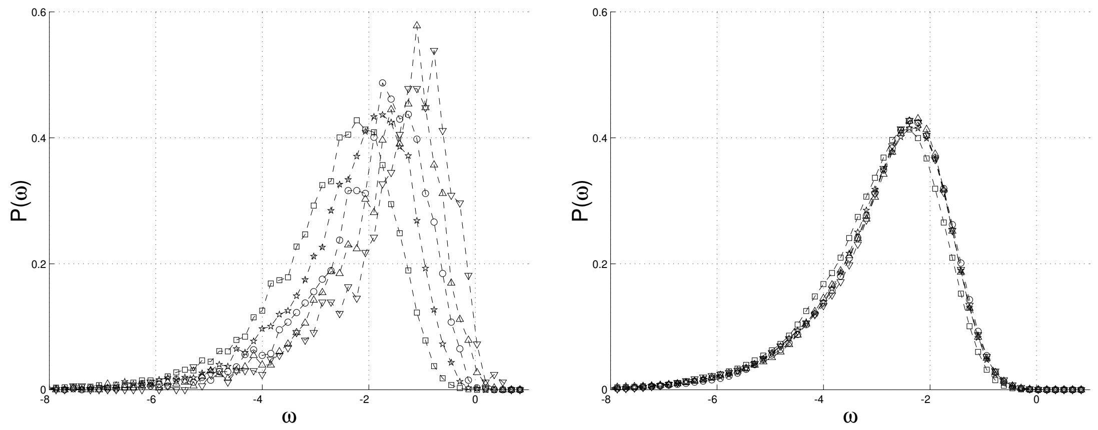

Fig. IV.4: Densités de probabilité du log des coefficients d'ondelette $\omega = \log_2 |d_v(j,k)|$ aux échelles $j = 6$ à 10 (à gauche), et densités de probabilité déduites par convolution avec le propagateur estimé (à droite).

2.4 Comparaison entre différentes méthodes.

2.4.1 Transformées en ondelettes.

Il existe plusieurs formes de transformées en ondelettes : continue, discrète et maxima des modules (MMTO). Les coefficients de la seconde constituent la partie de ceux de la première localisée sur une grille figée, dite dyadique : $d_X(j,k) = T_X(a = 2^j, t = 2^j k)$. Les coefficients de la troisième forment également une partie de la première correspondant à ses maxima locaux. Il est important de noter que, dans la MMTO, les maxima du module sont chaînés pour former des lignes de maxima. Pour le calcul de $S_q(a)$, on remplace $T_X(a,t)$ par le maximum local $\sup_{a' \leq a} T_X(a', t(a'))$ obtenu le long de la ligne de maxima à laquelle il appartient [21, 119]. Les équations (IV.19) à (IV.23) sont définies pour toutes les formes de transformées en ondelettes. Il est donc possible d'envisager chacun des estimateurs précédents pour chacune des déclinaisons de la transformée en ondelette. Nous voulons ici les comparer.

2.4.2 Simulation de cascades log-infiniment divisibles.

Suivant les algorithmes proposés dans [17], nous construisons des cascades log-infiniment divisibles sur bases d'ondelettes orthogonales. On peut écrire $\forall x \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall j_0 \in \mathbb{Z}$,

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_X(j_0,k)\phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_X(j,k)\psi_{j,k}(t) \ , \qquad \text{(IV.33)}$$

où les $\{\phi_{j_0,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ et les $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \leq j_0\}$, dilatées et translatées de la fonction d'échelle ϕ_0 et de l'ondelette-mère ψ_0, forment une base orthonormée. On choisit les coefficients d'approximation $\{a_X(j_0,k)\}_k$ égaux à 0. Les $\{d_X(j_0,k)\}_k$ suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à 1. Les coefficients $\{d_X(j,k)\}_{j,k}$ pour $j < j_0$ sont

type	I	I	I	I	II
C_1	-0.8	-0.8	-0.2	-0.2	-0.8
C_2	0.03	0.1	0.03/4	0.1/4	0.03
type	II*	II	II	III	III
C_1	-0.8	-0.2	-0.2	-0.2	-0.8
C_2	0.1	0.03/4	0.1/4	0.03/4	0.03

Tab. IV.1: Paramètres utilisés pour la synthèse de cascades log-infiniment divisibles en vue de comparer différents estimateurs. (I) $n(a) = -\ln a$, (II) $n(a)$ log par morceaux, a^* désigne l'échelle de raccord choisie égale à 2^7 (forme observée dans l'étude du trafic Internet [168]), (II*) correspond à la figure IV.5, (III) $n(a) \propto a^{-\beta}/\beta$.

définit récursivement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d_{j-1,2k} = & \quad W^{(1)}_{j-1,j}\ d_{j,k} \\ d_{j-1,2k+1} = & \quad W^{(2)}_{j-1,j}\ d_{j,k}. \end{aligned}$$

Les $W_{j-1,j}$ sont définis par $\pm\exp(\omega_{j-1,j})$ où les $\omega_{j-1,j}$ sont des variables aléatoires dont les cumulants satisfont les relations (IV.21) et (IV.22).

2.4.3 Comparaison des estimateurs

Protocole. Nous allons maintenant qualifier les performances statistiques des deux estimateurs, mis en œuvre sur les transformées en ondelettes continue et discrète ainsi qu'en utilisant la méthode MMTO (Maxima des Modules de la Transformée en Ondelettes). Ces comparaisons sont conduites sur des cascades log-infiniment divisibles synthétisées numériquement, avec trois catégories de fonctions n(a) : (I) $n(a) \equiv \ln a$, (II) $n(a)$ log par morceaux, a_* désigne l'échelle de raccord choisie égale à 2^7 (forme observée dans l'étude du trafic Internet [168]), (III) $n(a) = a^{-\beta}/\beta$ (modèle utilisé en turbulence développée [21, 43]). Les $\omega_{j-1,j}$ sont des variables aléatoires normales de moyenne $m_{j-1,j} = C_1(n(2^j) - n(2^{j-1}))$ et variance $\sigma^2 = C_2(n(2^j) - n(2^{j-1}))$; tous les autres cumulants sont nuls. Différentes paires de paramètres C_1, C_2 sont envisagées, correspondant à des situations de difficultés diverses (faible ou fort écart de $H(q)$ à qH, voir tableau IV.1). La taille des signaux synthétisés varie de $n = 2^{18}$ à 2^{25}.

Résultats. Les estimateurs sont mis en œuvre sur toute la gamme d'échelles disponible, de 2^3 à 2^{10}, gamme que l'on ne cherche pas à adapter. On ne se préoccupe ici que de performances d'estimations, et non de test de modèle (i.e., les cascades log-infiniment divisibles sont supposées toujours valides). Plutôt que de détailler les estimations relatives à chaque famille de signaux, nous présentons les figures pour une seule famille représentative (repérée par * dans le tableau). Nos conclusions reposent néanmoins sur l'analyse de l'ensemble des figures de type IV.5 et IV.6 (ces figures pour chaque cascade log-infiniment divisible sont disponibles à www.ens-lyon.fr/~sroux). Les performances d'estimation obtenues avec

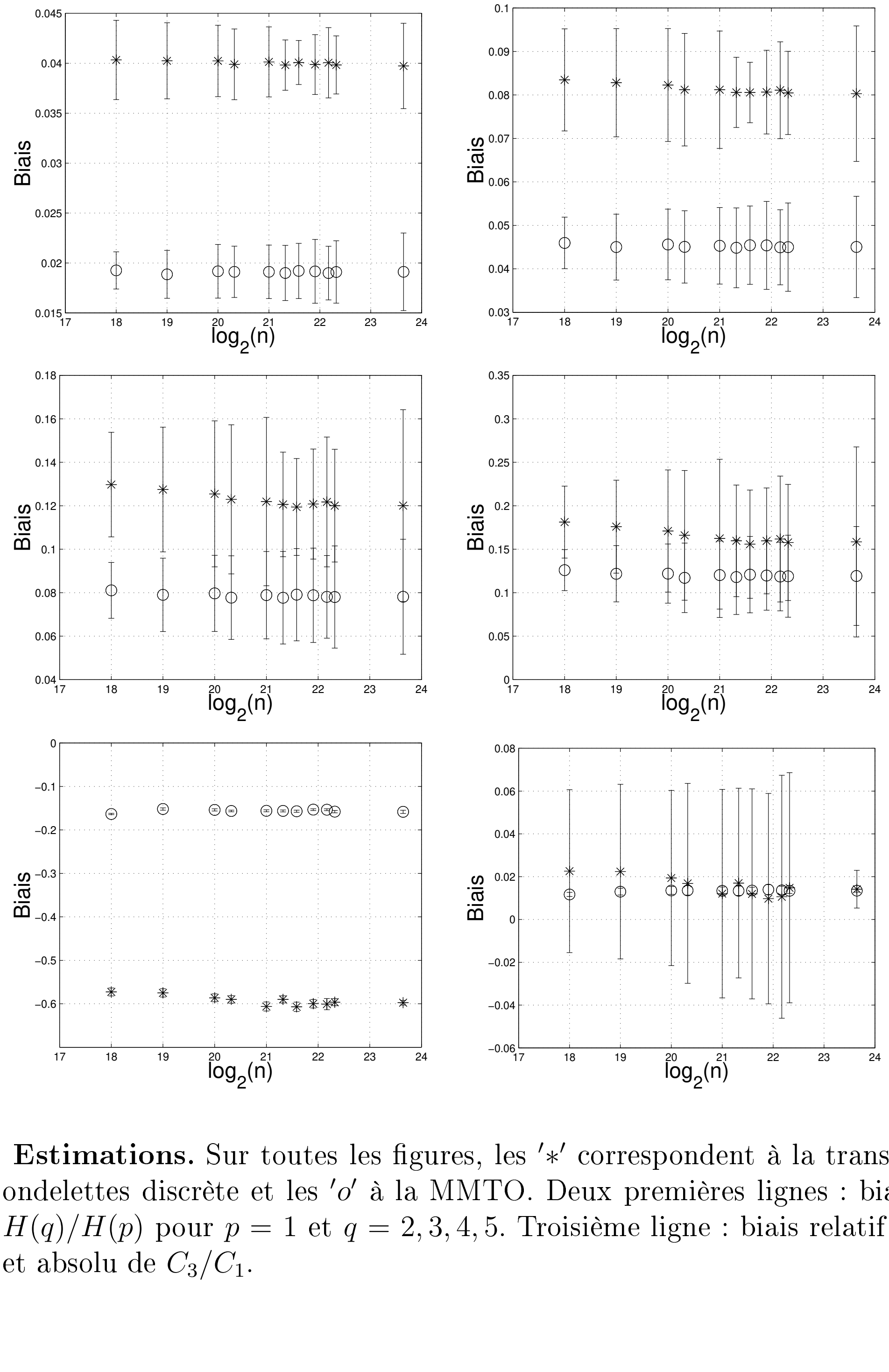

Fig. IV.5: **Estimations.** Sur toutes les figures, les $'*'$ correspondent à la transformée en ondelettes discrète et les $'o'$ à la MMTO. Deux premières lignes : biais relatifs $H(q)/H(p)$ pour $p = 1$ et $q = 2, 3, 4, 5$. Troisième ligne : biais relatif de C_2/C_1 et absolu de C_3/C_1.

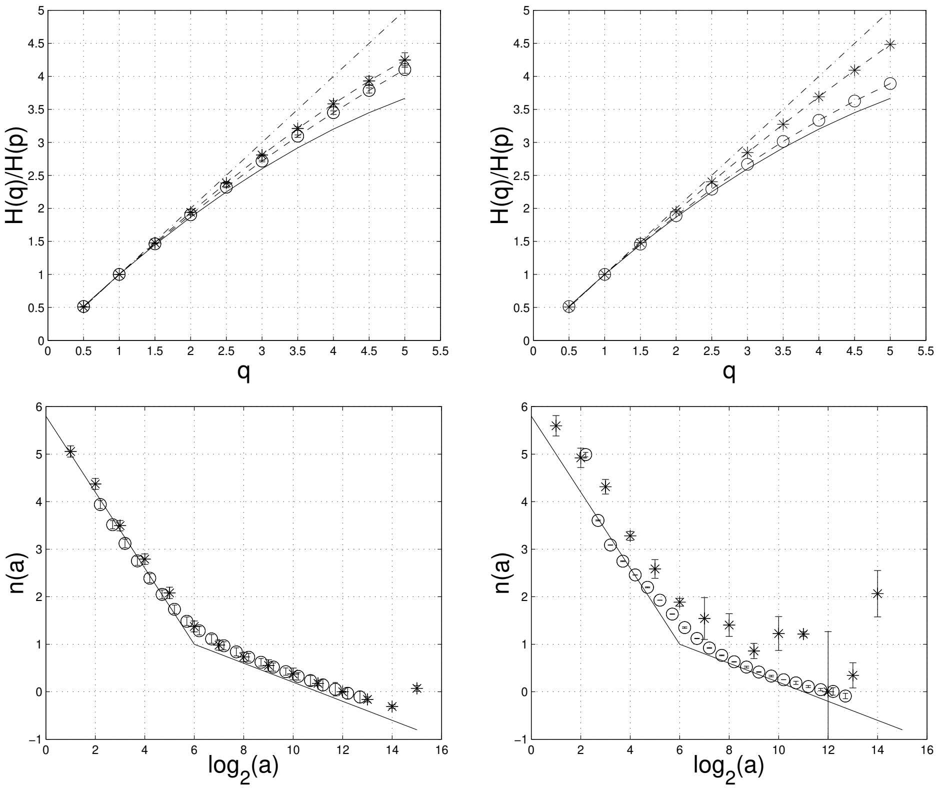

Fig. IV.6: **Estimations.** Sur toutes les figures, les $'*'$ correspondent à la transformée en ondelettes discrète et les $'o'$ à la MMTO. Première ligne : estimées de $H(q)/H(p)$ par les moments (gauche) et les cumulants (droite), le trait plein indique les valeurs théoriques. Deuxième ligne, estimées de $H(p)n(a)$ par les moments (gauche) et les cumulants (droite).

la transformée en ondelettes continue sont significativement moindres que celles obtenues avec la transformée en ondelettes discrète ou la méthode MMTO. Nous avons donc choisi de l'exclure dans la présentation des résultats.

En ce qui concerne la comparaison moments / cumulants du log, on constate systématiquement que, malgré une bonne estimation du C_1, le C_2 n'est quasiment jamais bien estimé. Cet effet résulte de la difficulté à estimer les cumulants du log de quantités centrées en 0, difficulté d'autant plus grande que l'échelle est petite. La méthode MMTO, par construction, contourne cette difficulté. On constate néanmoins que le biais d'estimation reste important (plus de 20%). Par ailleurs, plus C_2 est faible, meilleure est l'estimation. Cependant, les intervalles de confiance montre alors qu'il est impossible de le discriminer de $C_2 \equiv 0$. i.e., de distinguer entre processus multifractal ou autosimilaire. Dans tous les cas les estimations des paramètres reposant sur les moments sont beaucoup plus précises que celles basées sur les cumulants. On note également que toutes les estimations de $H(q)$ et C_l présentent un biais résiduel (i.e., qui ne décroît pas quand on augmente la durée de l'observation) alors que la variance des estimations décroît. Expérimentalement, ce biais semble croître avec C_2/C_1, indiquant que l'estimation de $H(q)$ est d'autant plus biaisée que $H(q)$ dévie de qH : il est très difficile d'estimer $H(q)$ lorsqu'il diffère de qH !

Quant à la comparaison entre transformée en ondelettes discrète et méthode MMTO, on constate que les performances d'estimation sont comparables, que ce soit pour les cumulants ou pour les moments. Cependant, les estimées par MMTO de $H(q)/H(p)$ exhibent systématiquement plus de courbure (ce qui ne signifie pas moins de biais) que celles issues de la TOD.

La fonction $n(a)$ est dans tous les cas toujours mieux estimée par les moments que par les cumulants. Cette estimation permet de discriminer entre les trois types de fonction $n(a)$ retenues et donc de discriminer les processus invariants d'échelle des autres.

En conclusion, nous dirons qu'en termes d'estimation (les conclusions pourraient être différentes s'il s'agissait de faire de la validation de modèle), l'utilisation des moments est clairement préférable à celle des cumulants. La méthode MMTO ne semble pas apporter d'amélioration substantielle en dépit d'un coût de calcul significativement supérieur à celui de la transformée en ondelettes discrète. Nous préférons donc l'utilisation de cette dernière. Notons aussi que l'on trouve toujours à l'œil une gamme d'échelles où les estimations sont très bonnes. Mais cette gamme n'est pas la même entre cumulants et moments. Le choix "humain" de la gamme d'échelles à choisir reste un facteur d'amélioration. Une optimisation de la variable F définie par (IV.9) est une solution possible.

2.5 Application à l'étude du trafic Internet

Les flux d'information circulant sur les grands réseaux d'ordinateurs constituent le *télétrafic informatique*. Il s'agit de paquets d'octets relatifs soit au protocole de transmission lui-même (signal de début/fin, identification de la source, du destinataire), soit à l'information transportée. Le contrôle actif des réseaux (problèmes de congestion...) existant comme la conception de nouveaux réseaux (dimensionnement des files d'attente...) représentent des enjeux scientifique, technologique et économique de premier plan. Dans cette

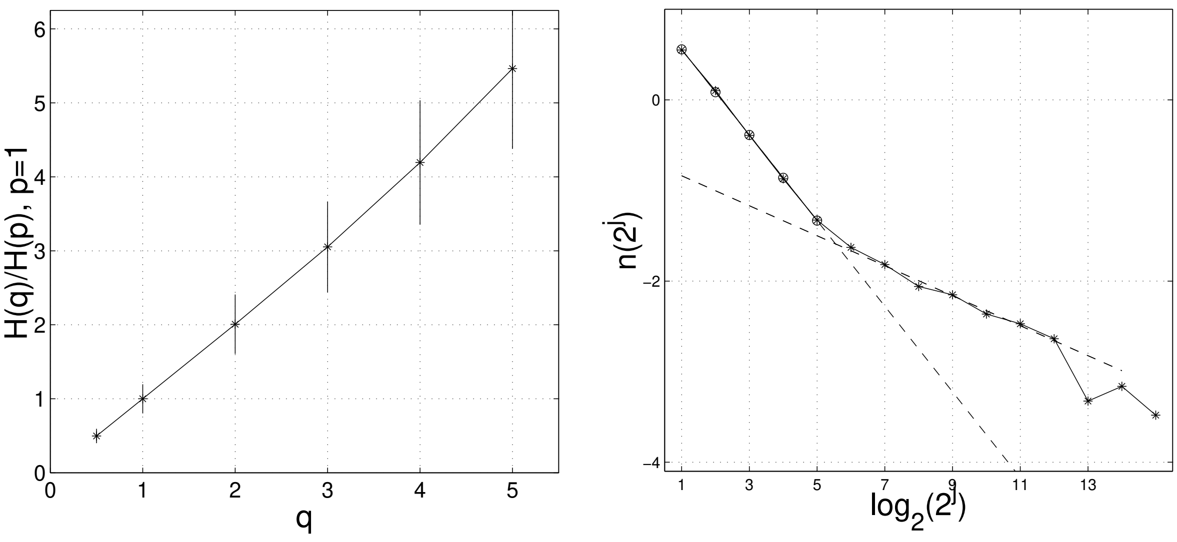

Fig. IV.7: Estimation de $H(q)$ et $n(a)$ à partir de données internet [168].

perspective, disposer d'une description statistique fine de ces flux d'information est un élément clé.

La structure des réseaux informatiques est très complexes. De grands réseaux sont divisés en réseaux de réseaux... à des échelles spatiales plus ou moins grandes. Les mécanismes de fonctionnement sont fortement non linéaires (deux paquets d'une même transmission ne suivent pas nécessairement le même parcours). La nature de l'information est très hétérogène : texte, son, image... Les applications associées sont en général très différentes (e-mail, téléphone, ftp...). La gamme des échelles de temps mises en jeu est immense, de la microseconde caractéristique de la technologie, à l'heure, caractéristique de l'activité humaine (soit au moins 9 décades !).

Les signaux permettant d'étudier le télétrafic informatique sont très divers : listes d'inter-arrivées, de durées, de volumes des paquets ; flux d'octets, de paquets, nombre de connexions actives, taux de nouvelles connexions... Leur comportement est le reflet de la complexité du système dont ils sont issus. Ils sont tous non-gaussiens, les ailes des distributions jouant alors un rôle crucial (divergence éventuelle de moments...). Leur structure de dépendance fait souvent apparaître des instationnarité et/ou le phénomène de mémoire à longue portée. Les hypothèses habituelles de stationnarité, distributions gaussiennes et dépendance courte mènent à des conclusions souvent erronées.

Nous disposons de données TCP/IP enregistrées par le groupe WAND de l'université de Waikato (Nelle-Zélande), sur un lien haut-débit ATM (155 Mbits/s) connectant l'université d'Auckland au reste du monde. Celles-ci, décrites en détail sur

/wand.cs.waikato.nz/wand/wits/index.html ,

consistent en enregistrements d'une masse considérable d'information pendant plusieurs heures dont sont extraites diverses séries temporelles telles que le flux des paquets au protocole TCP/IP, le flux de connexions actives, le taux d'extinction, d'activation de connexions, le volume en bytes de ces connexions ou le délai entre connexions successives.

L'utilisation des outils précédemment décrits sur ces données montre que celles-ci sont bien décrites par des cascades log-infiniment divisibles dans une très large gamme d'échelles (15 octaves environ). La caractéristique principale réside dans leurs fonctions $n(a)$ (voir figure IV.7). En effet, celles-ci diffèrent significativement de $\ln a$ et ressemblent davantage à des fonctions log par morceaux (justifiant le type (II) des signaux de synthèse choisi plus tôt). Ces deux comportements distincts avaient déjà été observés par d'autres auteurs dans le cadre multifractal ou "multiscaling" [68, 126]. Ces deux comportements sont ici décrits simultanément par une seule cascade log-infiniment divisible. L'échelle de rupture de la fonction $n(a)$ correspond à un temps de l'ordre de trois secondes. Son origine reste à déterminer précisément. Les fonctions $H(q)$ observées diffèrent faiblement du comportement linéaire qH et les résultats des simulations numériques décrites précédemment nous invite à conclure que cet écart ne peux être considéré comme significatif. La conclusion est donc que la complexité des comportements en lois d'échelle dans les données Internet tient davantage à la forme de $n(a)$ qu'à celle de $H(q)$, justifiant à posteriori l'intérêt de n'avoir pas forcé $n(a) \equiv \ln a$ a priori. Des analyses plus complètes de ces données Internet sont présentées dans [145, 168].

3 Etude détaillée d'un cas particulier : les L.F.S.M.

Nous présentons une contribution à l'étude de la procédure usuelle d'estimation du spectre multifractal de Legendre utilisant les fonctions de partition des coefficients de la transformée en ondelettes [47]. La méthode est appliquée à deux signaux : un mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal (MfBm) et un processus α-stable auto-similaire (α-SSS) appelé mouvement linéaire fractionnaire stable (L.F.S.M.) . Les trajectoires de ces deux processus présentent des allures irrégulières très semblables pour l'œil. Nous allons voir que cette analyse donne pour le second processus une estimation relativement grossière du spectre multifractal, la nature α-stable du processus pouvant passer inaperçue. Nous expliquons l'origine de cette erreur grâce à une étude détaillée des fonctions de partition du processus α-stable auto-similaire. Ce sont les propriétés très particulières des coefficients d'ondelette de ce type de processus qui permettent d'aboutir. Nous indiquons alors comment modifier notre démarche habituelle pour éviter une éventuelle méprise.

Il est important de préciser que ce travail a pour origine une rencontre entre Patrice Abry et Anne Tanguy (Département de Physique des Matériau, Univ. Lyon I) autour des processus L.F.S.M. et du problème de la description d'une ligne de mouillage [162]. Une fois de plus, physique et traitement du signal s'enrichissent mutuellement.

3.1 Position du problème

Les signaux présentant simultanément une *grande variabilité* sur une large gamme d'échelles temporelles et un *comportement local très irrégulier* apparaissent dans des contextes divers. L'*analyse multifractale* [140] est devenue l'un des outils les plus couramment utilisés pour caractériser ces signaux. Comme nous l'avons vu dans le chapitre **II**, ce type

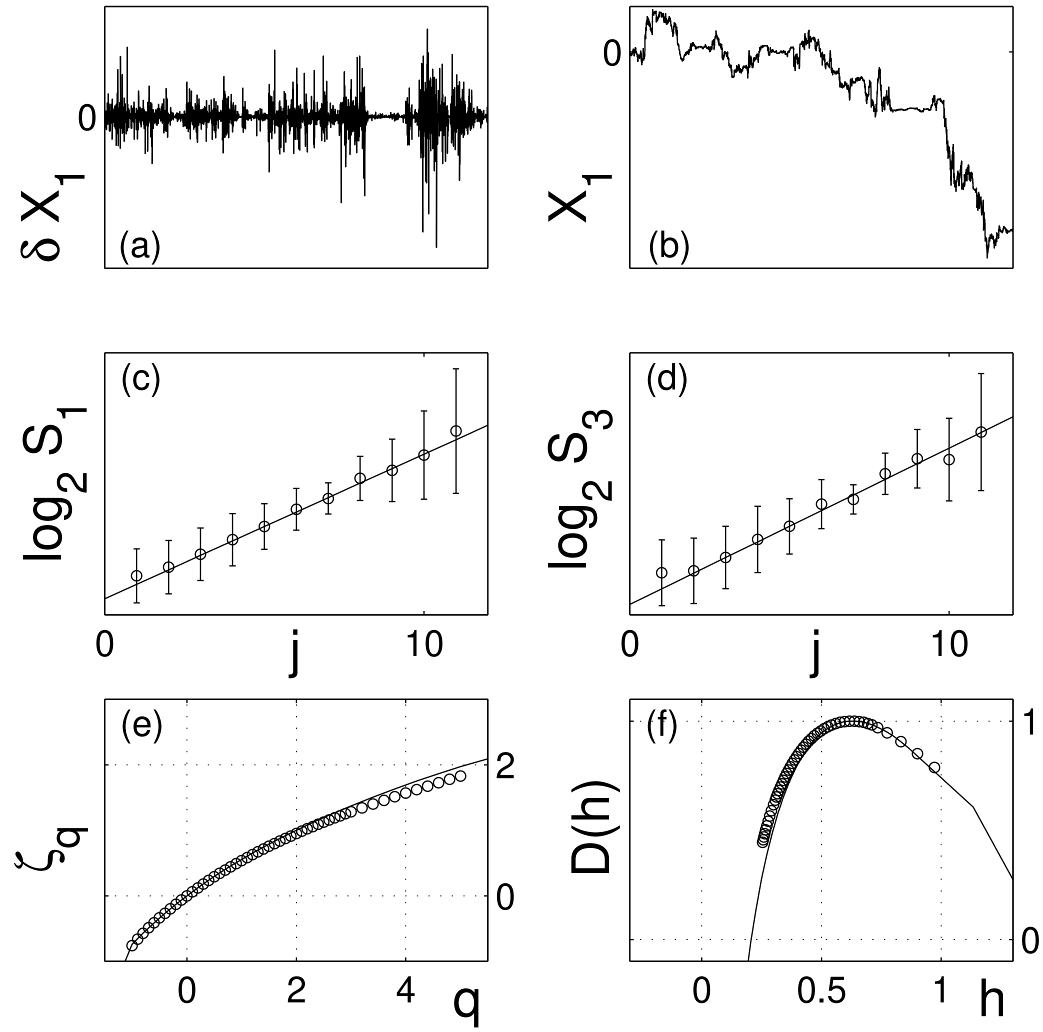

Fig. IV.8: **Mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal,** $H = 1/2$. (a) Accroissements, (b) processus, (c) diagramme logarithmique pour $q = 1$ et (d) $q = 3$, (e) exposants $\zeta(q)$ des fonctions de partition , (f) Spectre multifractal $D(h)$. La ligne pointillée (resp. les cercles) représente les valeurs théoriques (resp. estimées). La cascade de synthèse est une cascade binomiale symétrique utilisant une distribution β des multiplicateurs de paramètre $p = 1.6$, [140].

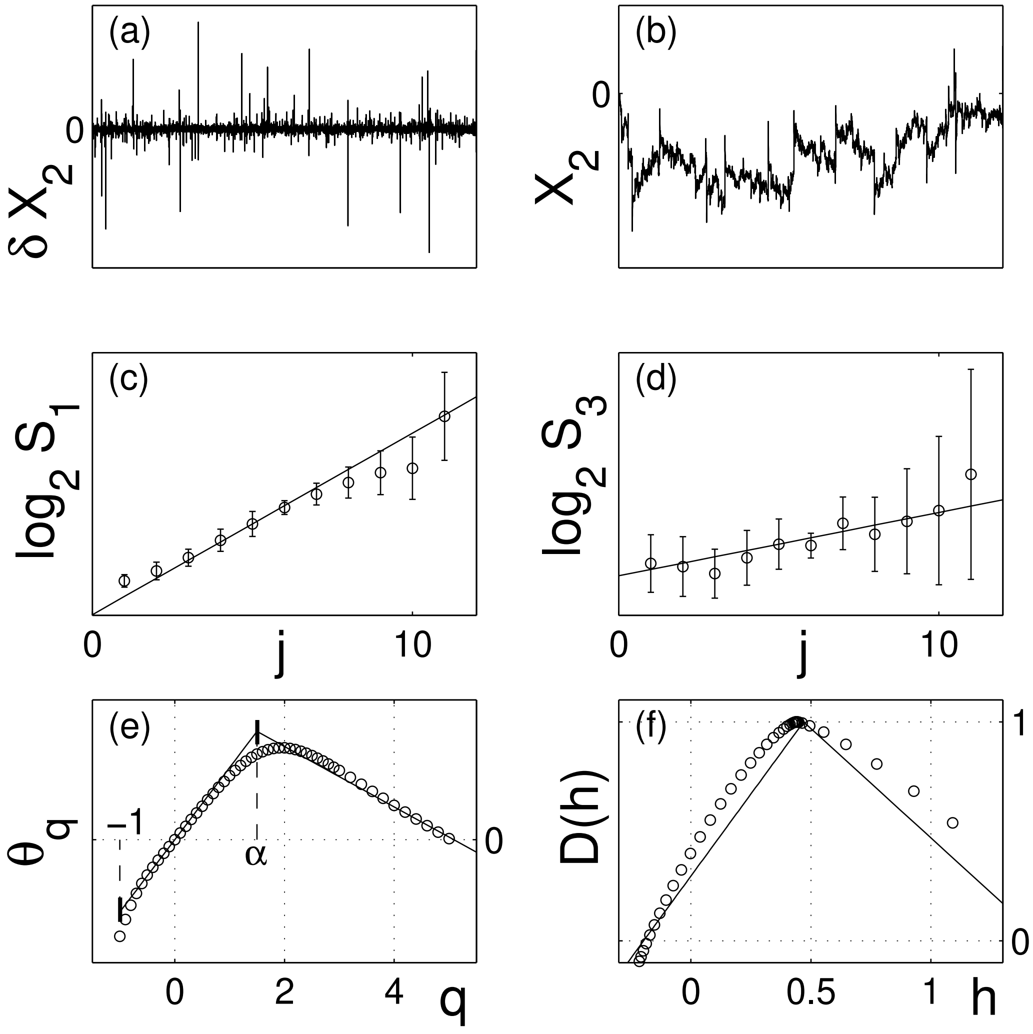

Fig. IV.9: **Processus LFSM avec $\alpha = 3/2$, $H = 0.47$.** Comme pour la figure IV.8 mais (e) représente les pentes θ_q, qui correspondent aux $\zeta(q)$ seulement si $q \in]-1, \alpha]$. Figure (f) un spectre multifractal estimé courbe apparaît, qualitativement différent du vrai spectre multifractal (lignes continues) .

de modèle permet de décrire des signaux dont la structure en échelle est bien plus complexe que celle du traditionnel mouvement brownien fractionnaire (fBm). Une propriété importante de ces processus provient de leur caractère non-gaussien. L'étude des moments d'ordre supérieur est indispensable. Une méthode usuelle consiste à estimer les exposants $\zeta(q)$ grâce à une régression linéaire dans un diagramme log-log comme décrit en 1.4. On en déduit ensuite le *spectre multifractal de Legendre*[5] $D(h) = \inf_{q\in\mathbb{R}}[qh - \zeta(q)]$ du processus.

Il existe une autre classe de modèles qui cumulent lois d'échelles et grande irrégularité locale : les processus α-stables auto-similaires (α-SSS). Ces processus sont multifractals [82, 140]. Ils constituent cependant une classe à part puisque leurs statistiques d'ordre $q \leq -1$ et $q \geq \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 2$) ne sont pas définies (sauf dans le cas gaussien, $\alpha = 2$). Cette propriété est une source d'irrégularité bien distincte de celle des autres processus multifractals, tels les cascades multiplicatives introduites par Mandelbrot, dont les marginales log-normales ont tous leurs moments finis. Nous montrons que malgré cette différence essentielle, il est possible de confondre des signaux des deux classes lorsqu'on effectue une analyse multifractale à l'aide de l'estimation des $\zeta(q)$. Une telle méprise peut s'avérer lourde de conséquences. Par exemple en télécommunication, dans l'étude des files d'attente de connexions, des moments divergents en entrée peuvent entraîner la présence de moments infinis dans les files d'attente, d'où des temps d'attente extrêmement longs.

A partir de deux exemples, un *mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal* (MfBm) et un *mouvement stable linéairement fractionnaire*, un processus α-SSS simple, nous montrons que les difficultés rencontrées sont de deux types. D'une part, de façon assez surprenante, il n'apparaît aucune discontinuité brutale dans le comportement des exposants $\zeta(q)$ estimés autour de $q = \alpha$. D'autre part, les problèmes d'estimation autour de ce point peuvent masquer des différences de comportement qui existent bel et bien. Les conséquences principales sont que le spectre multifractal est assez grossièrement estimé, et que la nature éventuellement α-stable du processus reste cachée. Une étude fine des fonctions de partitions à base d'ondelettes des processus α-stables nous permet d'expliquer l'origine de toutes ces difficultés, de décrire le comportement *exact* des quantités $\{\zeta(q), q \in \mathbb{Z}\}$ estimées, ainsi que les spectres multifractals correspondants. Enfin, nous proposons quelques suggestions permettant d'éviter ce genre de méprise.

3.2 Deux processus multifractals

Des morceaux de trajectoire des deux processus que nous allons étudier sont représentés en haut des figures IV.8 et IV.9 respectivement. Les paramètres de ces processus ont été choisis de sorte que leurs trajectoires soient d'allures et d'irrégularités semblables. Ainsi, si l'on ignorait l'origine de ces signaux, on pourrait être raisonnablement tenté d'appliquer la même méthode d'analyse aux deux signaux pour déterminer leurs spectres multifractals. Nous décrivons maintenant en détail les propriétés de chacun de ces deux exemples, et en particulier leurs spectres multifractals.

[5] D'autres types de spectres multifractals existent mais ne sont pas considérées ici [140]

3.2.1 Mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal

Le mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal $\mathcal{B}(t)$ (MfBm) a été introduit dans [104, 105] à propos des marchés financiers. Il entretient aussi des connexions étroites avec l'équation de Burgers [169]. Le MfBm [81, 140] est un mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$ de paramètre d'auto-similarité H [148], dont le temps a été redistribué : $t \to \mathcal{M}(t)$. Ce "brassage" est fortement non-lisse, en fait multifractal, au sens où $\mathcal{M}(t)$ est la fonction de distribution d'une mesure multifractale résultant d'une cascade multiplicative binomiale stochastique. Nous rappelons brièvement en quoi consiste une cascade binomiale. Il s'agit d'une distribution récursive d'un poids, initialement réparti de façon uniforme sur un intervalle "père", sur des intervalles "fils" chaque fois deux fois plus courts. Les segments obtenus après chaque division se voient attribuer des poids obtenus par multiplication du poids "père" par des variables aléatoires issues de tirages indépendants. Pour une revue des cascades multiplicatives et du MfBm voir [140]. Le spectre multifractal $D^{\mathcal{B}}(h)$ du MfBm se déduit de celui de la cascade par $D^{\mathcal{B}}(h) = D^{\mathcal{M}}(h/H)$. Les spectres de nombreuses cascades simples peuvent être calculés analytiquement. Il a été démontré dans [81] que les exposants $\zeta(q)$ des fonctions de partition ondelette du MfBm sont bien associés à son spectre multifractal.

3.2.2 Mouvement α-stable linéaire fractionnaire

A propos des distributions α-stables. Il s'agit des distributions de variables aléatoires stables par addition. Si $X1, \ldots, X_N$ sont N variables aléatoires α-stables indépendantes identiquement distribuées alors $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ est aussi α-stable et on a :

$$S_N \stackrel{d}{=} N^{1/\alpha} X \tag{IV.34}$$

Les distributions stables sont d'ailleurs les distributions des limites de sommes infinies de variables indépendantes identiquement distribuées. Le paramètre α est tel que $0 < \alpha \leq 2$. Lorsque $\alpha < 2$, la variance n'est plus définie ; lorsque $\alpha < 1$ la moyenne n'est plus définie non plus. Pour $\alpha = 2$ on retrouve la loi normale. Les lois stables sont infiniment divisibles et sont en général décrites par leur fonction caractéristique (voir Ch. **III**.1.2.2) de la forme $\phi = e^{-\rho}$ où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(\nu) & = & -i\gamma\nu + \sigma^\alpha \mid \nu \mid^\alpha \left[1 + i\beta \dfrac{\nu}{\mid \nu \mid} \omega(\nu, \alpha) \right] \\ \omega(\nu, \alpha) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \tan \dfrac{\pi\alpha}{2} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi} \ln \mid \nu \mid & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{IV.35}$$

Le paramètre d'échelle $\sigma \in \mathbb{R}^+$ décrit l'amplitude des variations. $\beta \in [-1, 1]$ est le paramètre de symétrie : lorsque $\beta = 1$ (resp. -1), la distribution est concentrée à droite (resp. à gauche) de γ. On désigne par $S_\alpha(\sigma, \beta)$ l'ensemble des distributions α-stables de paramètres σ et β. Le paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$ n'est qu'un paramètre de localisation (translation). On trouvera des présentations détaillées des variables α-stables dans [69, 80, 148].

Processus L.F.S.M. Nous considérons maintenant un processus α-stable avec $\alpha \in]0,2[$, défini par sa représentation intégrale [148] :

$$X(t) = \int f(t,u)\, M\{du\}\,, \tag{IV.36}$$

où $M\{du\}$ est une mesure α-stable symétrique de paramètre d'échelle σ ; $f(t,u)$ est un noyau d'intégration qui contrôle les dépendances temporelles des propriétés statistiques de X. Si f est une fonction bien choisie, X est un processus auto-similaire de paramètre d'auto-similarité H ($\forall c > 0, \{c^{-H}X(ct), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, où $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité de toutes les lois finies de distribution *voir Ch I*) Le processus de Lévy, $f(t,u) = \mathbf{1}(t-u \geq 0) - \mathbf{1}(u \leq 0)$, est l'exemple le plus simple : ses accroissements sont stationnaires et indépendants, $H = 1/\alpha$. Le mouvement stable fractionnaire linéaire (LFSM) [148], pour lequel $f(t,u) = (t-u)_+^{(H-1/\alpha)} - (-u)_+^{(H-1/\alpha)}$, où $(u)_+ = u$ si $u \geq 0$ et $(u)_+ = 0$ ailleurs, $\alpha \in]0,2[$, $H \in]0,1[$ $H \neq 1/\alpha$, est l'analogue stable du fBm à accroissements stationnaires mais dépendants. D'après [58, 131], moyennant de légères contraintes sur l'ondelette mère ψ, les coefficients d'ondelette $d_X(j,k)$ des processus stables existent et sont eux-mêmes des variables aléatoires α-stables de paramètre $\alpha_j = \alpha$ pour tout j. L'hypothèse d'auto-similarité implique que leurs paramètres d'échelle vérifie [3]

$$\sigma_j = \sigma_o\, 2^{jH}\,, \tag{IV.37}$$

où σ_o dépend à la fois de ψ et de $f(t,u)$. De plus,

$$\mathbb{E}|d_X(j,k)|^q = c_q\, 2^{jqH}\,, \quad -1 < q < \alpha. \tag{IV.38}$$

En dehors de $q \in]-1, \alpha[$, les moments de la valeur absolue sont infinis. Par conséquent, les exposants $\zeta(q) = qH$ ne sont bien définis que sur cet intervalle. Le calcul (très simple) de la transformée de Legendre correspondante donne le spectre multifractal "pointu" représenté figure IV.9(f). Les deux pentes sont données par α pour $h \in]-\infty, H[$, et -1 pour $h \in [H, \infty[$ (se reporter à [82, 140] pour une présentation théorique des propriétés multifractales des processus α-SSS).

3.2.3 Le nœud du problème

Nous atteignons le point crucial : en pratique on ne sait pas *a priori* si un signal multifractal est α-stable et *a fortiori* α sera généralement inconnu. Notons au passage l'intérêt de l'estimation de ce paramètre clé. On ne sait donc pas si les $\zeta(q)$ sont partout définis, ni quel est éventuellement leur domaine d'existence. La question est de savoir ce qui se passera si l'on applique "comme d'habitude" la méthode d'estimation décrite précédemment à des ordres $q \geq \alpha$ ou $q \leq -1$. Notons que pour des problèmes de convergence des estimateurs, les valeurs $q \leq 0$ sont rarement exploitées. Néanmoins nous présentons les résultats théoriques concernant aussi bien $q \leq -1$ que $q \geq \alpha$.

3.2.4 Etude du cas $q \geq \alpha$

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux ordres q plus grands que α. La question "pratique" est : *que montre un diagramme* $\log S_q$ *vs* j *pour* $q \geq \alpha$ *?*.

Pour y répondre, considérons $X \in S_\alpha(\sigma, \beta)$ une variable aléatoire α-stable de paramètre d'échelle σ et de paramètre de symétrie β. Soit $F(x)$ sa fonction de distribution cumulée. D'après le théorème 3, pp. 547 de [69],

$$\begin{cases} x^\alpha[1 - F(x)] & \xrightarrow[x \to +\infty]{} \quad L(\alpha)\sigma^\alpha(1 + \beta) \\ x^\alpha F(-x) & \xrightarrow[x \to +\infty]{} \quad L(\alpha)\sigma^\alpha(1 - \beta). \end{cases} \tag{IV.39}$$

avec

$$L(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2-\alpha}{\pi} \sin(\dfrac{\pi\alpha}{2})\Gamma(\alpha) & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \dfrac{2-\alpha}{\alpha\pi} \sin(\dfrac{\pi\alpha}{2})\Gamma(\alpha) & \text{si } 1 \leq \alpha < 2. \end{cases} \tag{IV.40}$$

Soit $G(y)$ la fonction de distribution cumulée de $Y = |X|^q$ avec $q > \alpha$. De (IV.39) il vient :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leq 0, \\ 1 - [2L(\alpha)\sigma^\alpha + \mu_2(y)]\dfrac{1}{y^{\alpha/q}} & \text{pour } y > 0, \end{cases} \tag{IV.41}$$

où $\lim_{y \to +\infty} \mu_2(y) = 0$. Les ailes de $G(y)$ satisfont alors les hypothèses du théorème 5, pp. 181 de [80]. On en déduit que $G(y)$ appartient au domaine normal d'attraction d'une loi stable $S_{\alpha/q}((2L(\alpha)\sigma^\alpha)^{q/\alpha}, 1)$. Soit Z variable aléatoire distribuée selon cette loi, et soit $\{X_k, k = 1, \ldots, n\}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de loi $S_\alpha(\sigma, \beta)$. Alors

$$Z \stackrel{d}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{q/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |X_k|^q \tag{IV.42}$$

Comme $\alpha/q < 1$ aucune constante de recentrage n'est nécessaire. D'après des résultats standards [69], nous obtenons (c_ℓ est la constante d'Euler) :

$$\begin{aligned} E[\log_2 |Z|] = & \frac{c_\ell}{\ln 2}\left(\frac{q}{\alpha} - 1\right) + \log_2((2L(\alpha)\sigma^\alpha)^{q/\alpha} \\ & + \frac{q^2}{\alpha^2}\log_2\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi q}{2\alpha}\right)\right) = C. \end{aligned} \tag{IV.43}$$

Réécrivons maintenant $S_q(j)$, pour $q > \alpha$, de la façon suivante :

$$S_q(j) = \frac{1}{n_j} \sum |d_{j,k}|^q = \frac{\sigma_j^q}{n_j^{1-q/\alpha}} \underbrace{\frac{1}{n_j^{q/\alpha}} \sum \left|\frac{d_{j,k}}{\sigma_j}\right|^q}_{\text{A}}. \tag{IV.44}$$

La quantité normalisée A est asymptotiquement ($n_j \to \infty$) indépendante de j. Si l'on fait l'hypothèse que les détails de l'analyse multirésolution sont i.i.d. (stationnaires et faiblement corrélés en réalité) à échelle fixée [3] nous appliquons les résultats ci-dessus avec un paramètre d'échelle égal à 1 pour obtenir le résultat asymptotique :

$$\mathbb{E}[\log_2 S_q(j)] = \log_2 \sigma_j^q - \log_2 n_j^{1-q/\alpha} + C. \tag{IV.45}$$

La répartition des coefficients d'ondelette d'un signal donné de longueur n sur un arbre dyadique implique $n_j \simeq n2^{-j}$, qu'il faudrait idéalement remplacer par le nombre de coefficients indépendants à chaque échelle (ce nombre se comporte aussi en $\sim n2^{-j}$). Grâce à la relation (IV.37) ($\sigma_j = \sigma_o\, 2^{jH}$) nous concluons qu'asymptotiquement :

$$\mathbb{E}[\log_2\, S_q(j)] = \left[1 + q\left(H - \frac{1}{\alpha}\right)\right]\; j\; + \text{Cste.} \tag{IV.46}$$

Ce résultat indique que, pour $q \geq \alpha$, le diagramme log-log de $S_q(j)$ doit présenter un comportement essentiellement linéaire de pente $\mathbf{1} + q\left(H - \frac{1}{\alpha}\right)$.

En résumé, si on s'intéresse aux fonctions de partitions ondelette d'ordre $q \geq \alpha$ d'un LFSM, $\mathbb{E}S_q(j)$ n'est pas définie tandis que $\mathbb{E}\log S_q(j)$ l'est et présente un comportement linéaire en j. On peut donc définir des quantités notées $\theta(q)$, pentes estimées dans des diagrammes logarithmiques :

$$\begin{cases} \theta(q) = qH = \zeta(q) & \text{pour } -1 < q < \alpha, \\ \theta(q) = 1 + q\left(H - \dfrac{1}{\alpha}\right) & \text{pour } q \geq \alpha \end{cases} \tag{IV.47}$$

3.2.5 Etude du cas $q \leq -1$

Le cas $q \leq -1$ présente un intérêt pratique moindre que le précédent puisqu'il est associé à des difficultés numériques d'estimation des fonctions de partition ondelette d'ordres négatifs. Cependant, traiter complètement ce cas permet d'apporter une réponse complète à la question de départ (on s'intéresse à tous les ordres $q \in \mathbb{Z}$).

La démarche est essentiellement la même que pour $q \geq \alpha$. La différence vient du fait que les moments d'ordres négatifs d'une distribution sont dominés par le comportement de la CDF au voisinage de $x = 0$, et non plus par l'allure des ailes de la CDF.

Considérons $X \in S_\alpha(\sigma, \beta)$ une variable aléatoire α-stable de paramètre d'échelle σ et de paramètre de symétrie β. Soit $F(x)$ sa fonction de distribution cumulée. On peut montrer que les fonctions densité de probabilité des distributions α-stables sont bornées et infiniment dérivables [69] (Zolotarev 1986). Nous pouvons donc écrire :

$$F(x) \sim a_o + a_1 x \quad \text{au voisinage de } 0 \tag{IV.48}$$

où a_1 est la valeur de la fonction densité de probabilité[6] en 0. Soit $G(y)$ la fonction de distribution cumulée de $Y = |X|^q$ avec $q < -1$. Notons que :

$$1 - G(y) = F\left(\frac{1}{y^{1/|q|}}\right) - F\left(-\frac{1}{y^{1/|q|}}\right) \tag{IV.49}$$

En reportant (IV.48) dans (IV.49) il vient :

$$G(y) \sim 1 - \frac{2a_1}{y^{1/|q|}} \quad \text{pour } y \longrightarrow +\infty \quad (q < -1) \tag{IV.50}$$

[6] Dans le cas où a_1 serait nulle, il faudrait reprendre le même raisonnement en remplaçant a_1 par la valeur de la première dérivée d'ordre impair $2p + 1$ de $F(x)$ non-nulle en 0. De plus il faudrait remplacer $1/|q|$ par $(2p + 1)/|q|$ partout où cela est nécessaire

Nous pouvons à nouveau utiliser le théorème 5, pp. 181 de [80] pour en déduire que G(y) appartient au domaine normal d'attraction d'une loi stable $S_{1/|q|}((2a_1)^{|q|}, 1)$. Soit Z variable aléatoire distribuée selon cette loi, et soit $\{X_k, k = 1, \ldots, n\}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de loi $S_\alpha(\sigma, \beta)$. Alors

$$Z \stackrel{d}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{|q|}} \sum_{k=1}^{n} |X_k|^q \tag{IV.51}$$

qui est l'analogue de (IV.42). Aucune constante de recentrage n'est nécessaire car $1/|q| < 1$. En considérant à nouveau les détails à échelle fixée comme des variables i.i.d., les équations (IV.43) et (IV.44) où l'on remplace q/α par $|q|$ permettent d'aboutir à la relation asymptotique :

$$\mathbb{E}[\log_2 S_q(j)] = \log_2 \sigma_j^q + \log_2 n_j^{|q|-1} + C. \tag{IV.52}$$

Or $n_j \simeq n2^{-j}$, donc grâce à la relation (IV.37) ($\sigma_j = \sigma_o\, 2^{jH}$) nous concluons qu'asymptotiquement :

$$\mathbb{E}[\log_2\, S_q(j)] = [1 + q\,(H+1)]\, j + \mathrm{Cste}, \quad q \leq -1 \tag{IV.53}$$

Une fois encore , il faudrait idéalement remplacer n_j par le nombre de coefficients indépendants à chaque échelle, mais ce nombre se comporte aussi en $\sim n2^{-j}$. Ce résultat indique que, pour $q \leq -1$, le diagramme log-log de $S_q(j)$ doit présenter un comportement essentiellement linéaire de pente $1 + q\,(H+1)$. Il est remarquable que ce comportement ne dépend que de H et non de α.

Finalement, si l'on s'intéresse aux fonctions de partition ondelette d'ordre $q \notin]-1, \alpha[$ d'un LFSM, $\mathbb{E}S_q(j)$ n'est pas définie tandis que $\mathbb{E}\log S_q(j)$ l'est et présente un comportement linéaire en j. On peut donc définir des quantités notées $\theta(q)$, pentes estimées dans des diagrammes logarithmiques :

$$\begin{cases} \theta(q) = 1 + q\,(H+1) \quad \text{pour } q \leq -1, \\ \theta(q) = qH = \zeta(q) \quad \text{pour } -1 < q < \alpha, \\ \theta(q) = 1 + q\left(H - \dfrac{1}{\alpha}\right) \quad \text{pour } q \geq \alpha \end{cases} \tag{IV.54}$$

3.3 Discussion : le piège

La procédure d'estimation est appliquée avec succès à l'échantillon de trajectoire du MfBm pour $q \in [-1, 5]$ (voir figure (IV.8)). Sur la ligne du milieu sont représentés les diagrammes logarithmiques pour les ordres $q = 1$ et $q = 3$. Nous constatons les valeurs estimées suivent bien la prédiction théorique (en trait plein). De même, les valeurs estimées des exposants $\zeta(q)$ sont très voisines des valeurs théoriques, et le spectre multifractal est bien reproduit.

La figure (IV.9) montre les résultats obtenus pour le LFSM. Comme prévu, des comportements linéaires sont observés dans les diagrammes logarithmiques, même pour $q = 3 > \alpha$ alors que $\mathbb{E}S_3$ n'est pas définie. Les pentes estimées $\theta(q)$ vérifient bien les lois prédites et les changement de comportement en $q = \alpha$ et $q = -1$. En revanche, le spectre multifractal de Legendre estimé a une forme en cloche, bien arrondie, nettement différente du spectre théorique, anguleux, linéaire par morceaux.

Lorsqu'on applique la procédure d'analyse multifractale habituelle à un processus α-stable multifractal, le spectre de Legendre estimé ne se distingue pas d'un spectre multifractal standard, et la nature auto-similaire du processus n'est pas détectée. Pourtant les causes du caractère multifractal des processus étudiés sont radicalement différentes. Dans le cas particulier du processus Lévy-stable, les accroissements sont stationnaires et les irrégularités naissent du caractère α-stable auto-similaire du processus. La forte irrégularité des MfBm provient au contraire de la complexité des dépendances introduites par la construction en cascade. L'absence d'une signature α-stable flagrante est trompeuse non-seulement dans le spectre multifractal, mais déjà, bien en amont, dans les diagrammes logarithmiques. Des relations linéaires entre logarithmes sont observés là où aucune loi de puissance ne peut être définie ! L'évolution douce et ronde du comportement des pentes $\theta(q)$ autour de $q = \alpha$ et $q = -1$ n'aide pas non plus à prendre du recul... Cette douceur est due à la qualité des estimations de $\theta(q)$ qui est d'autant plus affectée qu'on approche les valeurs $q = \alpha$ et $q = -1$.

Nous devons aussi remarquer que la simplicité du spectre multifractal (fonction linéaire par morceau) dans le cas du LFSM n'est absolument pas identifiée. La source de l'erreur n'est pas dans la différence entre les transformées de Legendre de $\zeta(q)$ et $\theta(q)$. C'est la qualité des estimations pour $q \sim \alpha$ qui doit être incriminée. En effet, la transformée de Legendre est très sensible aux erreurs sur les droites. La légère courbure des $\theta(q)$ dans la gamme $q \leq \alpha$ "abîme" la pointe du spectre multifractal située en $(h, D(h)) = (H, 1)$. Le changement de pente brutal attendu se transforme en une cloche mollement arrondie. La difficulté centrale vient du basculement de l'existence à la non-existence des moments en $q = \alpha$. Un œil exercé et attentif pourra tout de même être alerté par l'accumulation de points autour du maximum dans le spectre multifractal estimé. Il est aussi remarquable qu'on arrive à estimer des exposants présentant un maximum (en $q = \alpha$). En effet, les procédures d'estimation n'arrivent en général pas à décrire la présence d'un maximum suivi d'une décroissance des $\zeta(q)$ lorsqu'ils sont bien définis.

Un moyen de surmonter ce problème serait d'identifier les causes de ces estimations de "qualité médiocre" dans le but de les éliminer. Une autre approche consiste à ajouter en amont de la méthode d'analyse un test de convergence des $S_q(j)$ pour déterminer la gamme des ordres q pertinents pour l'estimation du spectre multifractal, mais aussi associés à des estimateurs performants. De tels tests ne sont pas évidents à mettre en œuvre sur des séries temporelles qui peuvent s'avérer non-stationnaires et/ou présenter des dépendances statistiques importantes à longue portée. Les coefficients en ondelettes reproduisent bien le comportement des moments, sont stationnaires et présentent des dépendances faibles ou de courte portée. Ils constituent probablement de bons candidats pour l'élaboration de ces tests.

4 Conclusion

Nous avons d'abord décrit et étudié des estimateurs à base d'ondelettes des exposants $\zeta(q)$ du multiscaling (ou du formalisme multifractal). Ces estimateurs consistent en une régression linéaire, pondérée ou non, dans des diagrammes log-échelle, c'est-à-dire $Z_q = \log_2 S_q$ vs $j = \log_2 a$. Nous proposons des estimateurs dans les cas gaussiens et non-gaussiens. Chaque fois, un intervalle de confiance est calculé théoriquement ou estimé numériquement.

Nous proposons ensuite une méthode d'estimation des fonctions $H(q)$ et $n(a)$ caractérisant d'une cascade log-infiniment divisible à partir des moments $\mathbb{E} \mid d_X(j,k) \mid^q$. Là encore nous accompagnons l'estimation d'un intervalle de confiance sur $\hat{H}(q)$. Nous utilisons des régressions linéaires dans des diagrammes $\log S_q$ vs $\log S_p$. Nous proposons aussi des estimateurs à partir des cumulants C_k de $\ln \mid d_X(j,k) \mid$. Toutes ces méthodes sont mises en œuvre sous la forme de codes MATLAB disponibles sur demande.

La comparaison entre différentes méthodes d'estimation utilisant différentes transformées en ondelettes (discrète et MMTO) montre qu'il reste encore du pain sur la planche. S'il semble que la méthode MMTO soit parfois légèrement plus précise et plus stable, le biais et la variance restent mal maîtrisés, comme pour les autres méthodes. Les méthodes utilisant une transformée en ondelette discrète présentent le gros avantage d'être extrêmement rapides. Toutes les méthodes semblent d'autant moins fiables qu'on s'écarte de l'auto-similarité stricte ($\zeta(q)$ de plus en plus courbés).

Nous présentons à titre d'application les résultats obtenus sur des données de télétrafic informatique. Nous observons que $H(q) \simeq qH$ est certainement une fonction linéaire de q, ce qui correspond à une distribution de Dirac pour le propagateur. Cependant, la fonction $n(a)$ est pratiquement une fonction logarithmique par morceau : la complexité de ces signaux est essentiellement contenue par la fonction $n(a)$. Notons ce fait remarquable que les distributions des coefficients $d_X(j,k)$ sont dans ce cas toutes similaires à une dilatation près, sans que le processus soit auto-similaire.

Nous montrons enfin comment, dans certains cas, l'application aveugle des procédures habituelles d'estimation d'un spectre multifractal de Legendre peut conduire à une méprise. Les mouvements linéaires fractionnaires stables (L.F.S.M.) possèdent un spectre multifractal trivial constitué de deux segments de droites. Le caractère anguleux du spectre multifractal (en forme de tente) est difficilement mis en évidence par la procédure d'estimation. Pire encore, alors que les moments d'ordre $q < -1$ et $q > \alpha$ ne sont pas définis, on observe nettement des droites dans les diagrammes log-échelle ($\log_2 S_q$ vs $j = \log_2 a$). Nous démontrons analytiquement ce comportement par un argument de limite centrale (convergence vers une variable α-stable), et insistons sur la nécessité d'une détection préalable du caractère α-stable du processus.

Chapitre V
Intermittences en turbulence : une étude expérimentale

V. Intermittences en turbulence : une étude expérimentale

Nous avons déjà présenté (Ch. **I**) quelques-unes des questions qui se posent en turbulence à propos des notions d'intermittence statistique, d'intermittence spatio-temporelle, ainsi que sur leurs relations éventuelles. L'importance réelle des "structures cohérentes" (quelle que soit leur définition) n'est pas clairement établie [76]. Si l'œil de l'observateur se focalise naturellement sur certains objets présents dans un écoulement, les études systématiques peinent à mettre leur rôle dynamique ou leur poids statistique en évidence. Parmi d'autres propositions, She & Lévêque [153] suggèrent que les maxima de dissipation jouent un rôle central et contrôlent les lois d'échelles observées sur les signaux de vitesse "fil chaud". Nous avons mené un travail dans cette direction, avec au départ beaucoup d'espoir puisque les observations expérimentales semblaient confirmer cette conjecture. Les résultats de cette étude, qui a tempéré notre enthousiasme en mettant à jour un artefact statistique remarquable ("l'exposant -2/3 est partout !"), sont rapportés dans l'annexe **B**. C'est une approche différente que nous décrivons dans ce chapitre.

Les cascades log-infiniment divisibles (pour les accroissements ou pour les coefficients d'ondelette) fournissent un cadre formel à la fois souple et riche pour généraliser la notion d'invariance d'échelle (Ch. **II**). Après en avoir développé divers aspects (Ch. **III**), nous avons présenté et qualifié les outils d'estimation associés, nécessaires à la modélisation de données expérimentales (Ch. **IV**). Nous présentons dans ce chapitre une étude expérimentale de l'influence de structures cohérentes sur l'intermittence statistique d'un signal de vitesse "fil chaud" en mettant à profit l'investissement théorique et pratique des chapitres précédents.

Il s'agit de mesurer la pression et la vitesse conjointement en temps et en espace dans un écoulement turbulent. Nous détectons les fortes dépressions nettement visibles sur le signal de pression et étudions la statistique des temps d'attente entre ces événements. Ensuite nous menons une étude statistique des signaux de pression et de vitesse, conditionnée par la liste des événements préalablement détectés. Ceci nous permet de vérifier que les dépressions peuvent être associées à l'existence de structures cohérentes d'allure très similaire à des tourbillons filamentaires. L'utilisation d'une transformée en ondelettes nous permet de séparer le signal de vitesse en une phase "fond turbulent" et une phase "filaments". Nous calculons alors les fonctions de structure ondelette pour chaque "phase", et exploitons le formalisme des cascades log-infiniment divisibles pour aboutir à des conclusions originales. Certaines parties de ce chapitre sont publiées dans [46].

1 Démarche expérimentale

1.1 Dispositif expérimental

La géométrie choisie est celle de von Kármán, aussi couramment appelée *machine à laver*, décrite par la figure V.1. L'écoulement est créé par la rotation en sens contraire de deux disques, munis de pales, situés aux extrémités d'un cylindre. Cette disposition est utilisée par de nombreuses équipes, et reconnue pour engendrer une forte turbulence dans une région compacte de l'espace [35, 67, 110, 133]. Le fluide utilisé est ici un gaz, le plus souvent l'air mais aussi l'hélium, le dioxyde de carbone et l'hexafluorure de soufre. Les fréquences de rotation des disques $F_{rot} = \Omega/2\pi$ accessibles sont comprises entre 10 et 50 Hz. Selon les cas, cette vitesse est stabilisée grâce à un tachymètre et une boucle de rétroaction avec une précision de 0,1%, ou plus simplement manuellement à l'aide d'un stroboscope.

La pression est mesurée en paroi. La vitesse est mesurée aussi près que possible du capteur de pression (entre 2 et 6 mm). Les deux capteurs sont placés quelques centimètres au-dessus du plan médian. Le capteur de pression est un transducteur piézoélectrique PCBH112A21 de 5mm de diamètre, monté en affleurement à la paroi interne du cylindre. Il est compensé en accélération. Le diamètre de la zone active est de $2,1$ mm, sa fréquence de coupure basse à -5% est à $0,05$ Hz et son temps de montée vaut 25μs. Les mesures de vitesse sont effectuées à l'aide d'un anémomètre à température constante TSI IFA100 pilotant un film chaud TSI 1260A-10. La zone active a un diamètre de 10μm et une longueur de $0,5$ mm. Dans cette situation, on mesure essentiellement le module de la composante de vitesse perpendiculaire au fil [53]. Les constantes caractéristiques du film chaud sont déterminées lors d'un protocole d'étalonnage (annexe C). Si besoin est, des corrections sont appliquées pour tenir compte de l'échauffement du fluide ; dans le cas où l'écoulement est thermostaté (cf 1.2.2), ces corrections sont inutiles. Les enregistrements sont constitués de fichiers de 2^{20}=1048576 points digitalisés avec une précision de 23 bits par un échantillonneur HP1430A, à une fréquence de 78125 Hz.

1.2 Deux dispositifs similaires

Nous avons effectué plusieurs campagnes de mesures dans des écoulements de von Kármán (fig. V.1). Deux configurations expérimentales différentes ont été installées successivement. La première (la plus simple) permet d'atteindre dans l'air un nombre de Reynolds R_λ de l'ordre de 300 pour une fréquence de rotation des disques $F_{rot} = 30$ Hz. L'autre configuration permet d'espérer atteindre des valeurs plus grandes de R_λ dans le but d'effectuer des comparaisons pour des nombre de Reynolds différents ($100 \leq R_\lambda \leq 800$, voir 1.3).

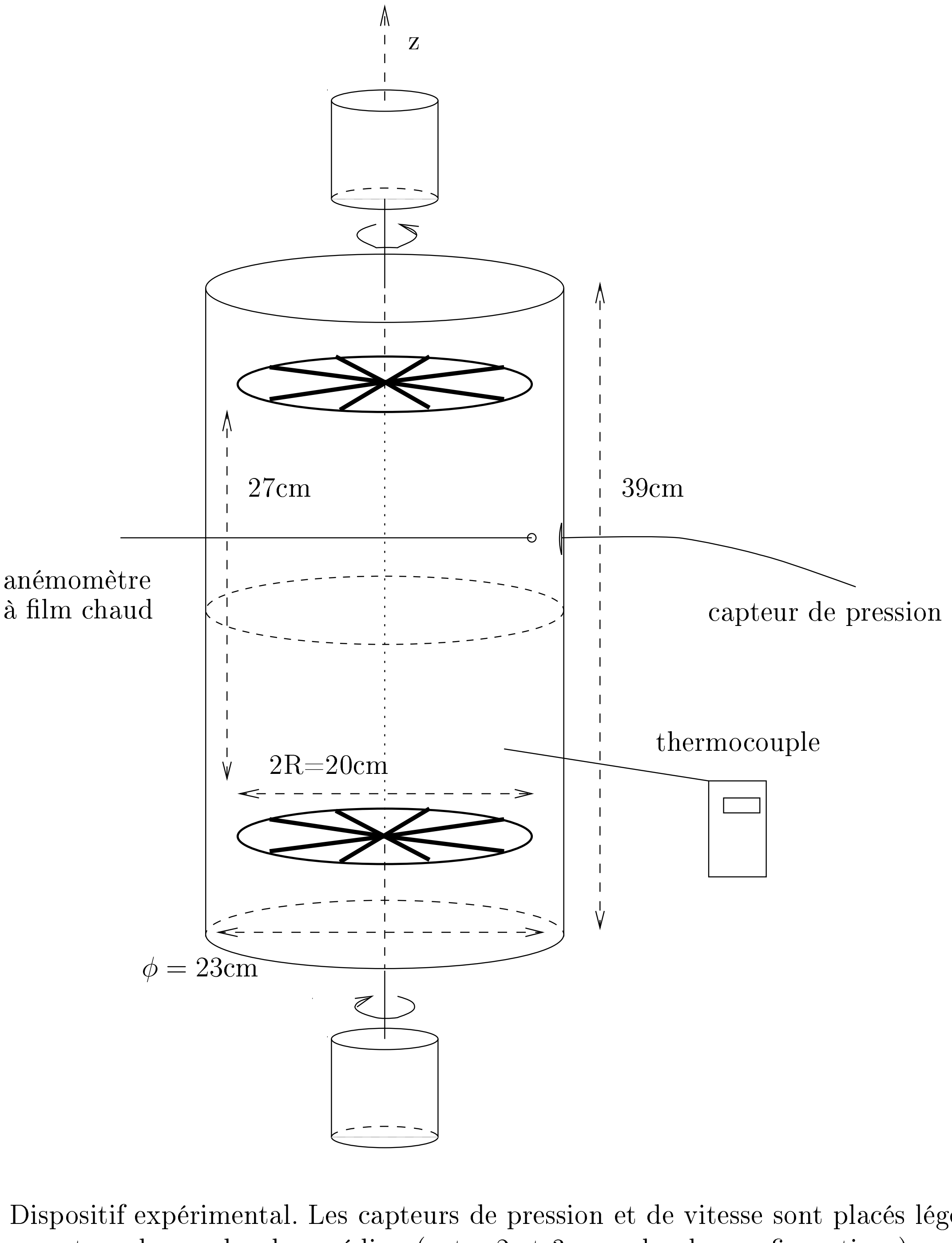

Fig. V.1: Dispositif expérimental. Les capteurs de pression et de vitesse sont placés légèrement au-dessus du plan médian (entre 2 et 3 cm selon les configurations).

	grandeur	He	air	CO_2	SF_6	unité
masse molaire	$\mathcal{M}$	4	29	44	146	g.mol^{-1}
masse volumique	ρ	$0,164$	$1,18$	$1,79$	$5,9$	kg.m^{-3}
conductivité thermique	λ_{th}	$0,191$	$0,0262$	$0,0166$	$0,013$	W.m^{-2}.K^{-1}
capacité thermique	c_p	5200	1006	833	661	J.kg^{-1}.K^{-1}
viscosité cinématique	ν	12	$1,57$	$0,834$	$0,19$	.10^{-5}m^2.s^{-1}
viscosité dynamique	μ	$1,99$	$1,85$	$1,49$	$1,15$	.10^{-5}kg.m^{-1}.s^{-1}
diffusivité thermique	κ	$22,4$	$2,22$	$1,12$	$0,33$	.10^{-5}m^2.s^{-1}
nombre de Prandtl	Pr	$0,54$	$0,71$	$0,75$	$0,6$	$--$

Tab. V.1: Grandeurs caractéristiques des 4 gaz : hélium, air, dioxyde de carbone et hexafluorure de soufre à température ambiante (20°C) [25, 97].

1.2.1 Cylindre en plexiglas : dispositif n^{o}1

Le cylindre ainsi que les flasques situées aux extrémités sont en plexiglas. Les disques font 2R= 20 cm de diamètre, et sont séparés par une distance de 27 cm. Ils sont munis de 8 pales de 2 cm de hauteur chacun pour améliorer l'entraînement du gaz. Le cylindre de diamètre ϕ=23 cm est haut de H=39 cm. Ce sont les dimensions de ce dispositif qui sont reportées sur la figure V.1. Les disques sont entraînés en sens inverses par deux moteurs à courants continus indépendants de puissance nominale 450 W chacun. La vitesse de rotation, comprise entre 10 et 50 Hz, est stabilisé par une boucle de rétroaction à $\mp$ 0,1%. L'essentiel des mesures a été enregistré à F_{rot} =30 Hz ; ce sont ces données que nous utilisons ici. La température du fluide est contrôlée grâce à un thermocouple baignant dans le gaz. Dans cette configuration, le gaz utilisé est de l'air uniquement.

1.2.2 Cuve en laiton thermostatée : dispositif n^{o}2

Dans le but d'étudier la sensibilité des résultats obtenus dans le dispositif n^{o}1 à une variation de R_λ, nous avons conçu un second dispositif, similaire à celui du 1.2.1, auquel nous avons apporté quelques modifications importantes. La cuve est étanche, ce qui permet d'utiliser d'autres gaz que l'air ; toutes conditions égales d'ailleurs, un gaz plus dense que l'air permet d'atteindre des valeurs de R_λ plus grandes. L'inconvénient est l'énergie nécessaire : plus le gaz utilisé est lourd, plus il faut d'énergie pour le mettre en mouvement ($\mathcal{P} = M.\bar{\varepsilon}$). Il faut des moteurs de couple et puissance suffisants. De plus, cette énergie est dissipée par viscosité sous forme de chaleur. L'élévation de température attendue (annexe D) pour une fréquence de rotation F_{rot}=30 Hz est d'environ 60°C pour le SF$_6$ au lieu de 10°C pour l'air au bout de quelques dizaines de minutes ! Il a fallu prévoir un système de refroidissement (fig. V.2). Les disques et les flasques sont cette fois en Dural, le cylindre est en laiton. Le serpentin à eau soudé autour du cylindre (annexe D) est en cuivre. Les pales des disques sont en PVC et mesurent 2 cm de haut. Les dimensions sont proches de celles mentionnées pour la cuve en plexiglas : H = 42 cm, ϕ = 25.5 cm, $2R$ = 20 cm.

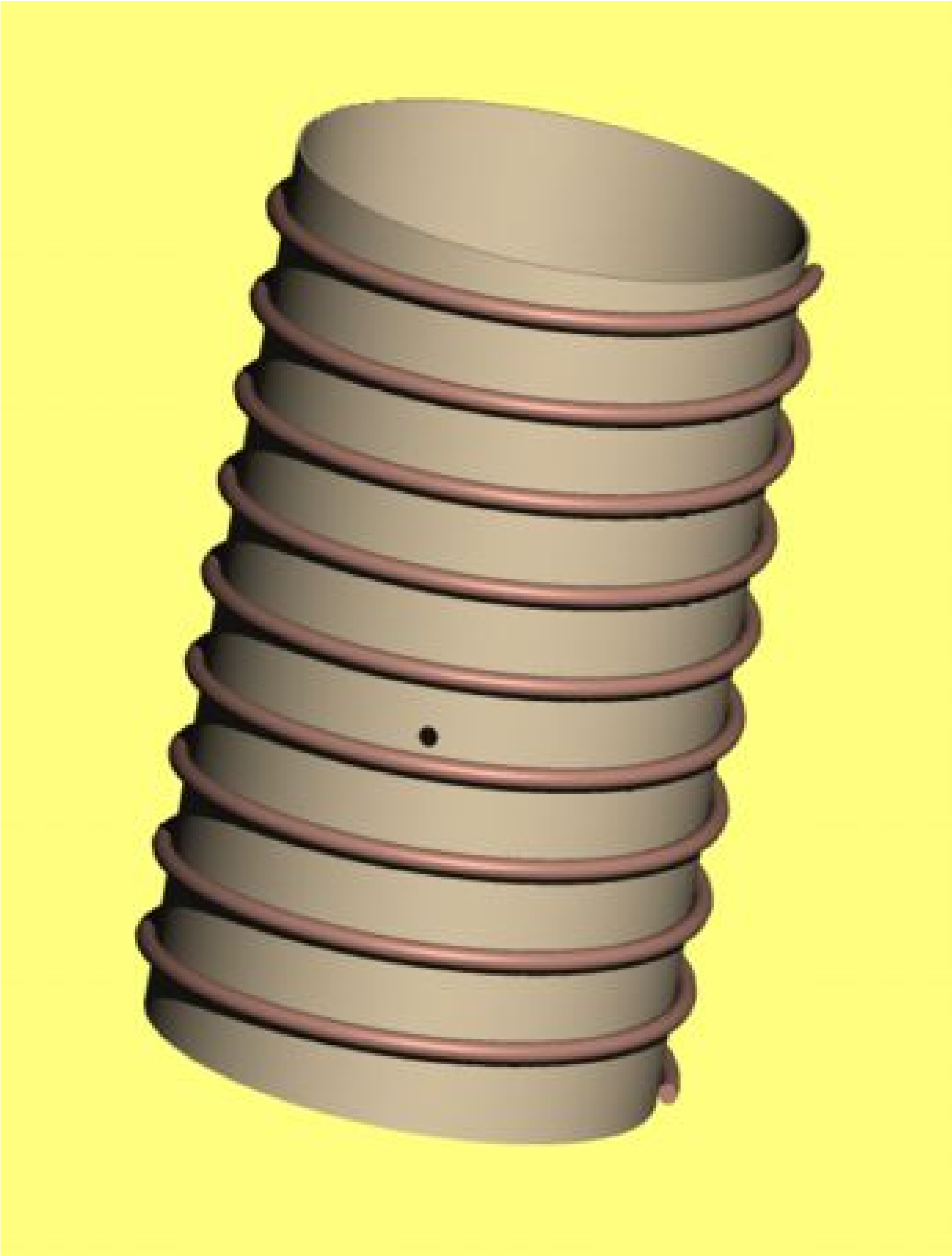

Fig. V.2: Cylindre de laiton entouré par un serpentin de cuivre où circule l'eau froide courante, dispositif n^o 2. Le trou latéral offre un accès pour les instruments de mesures.

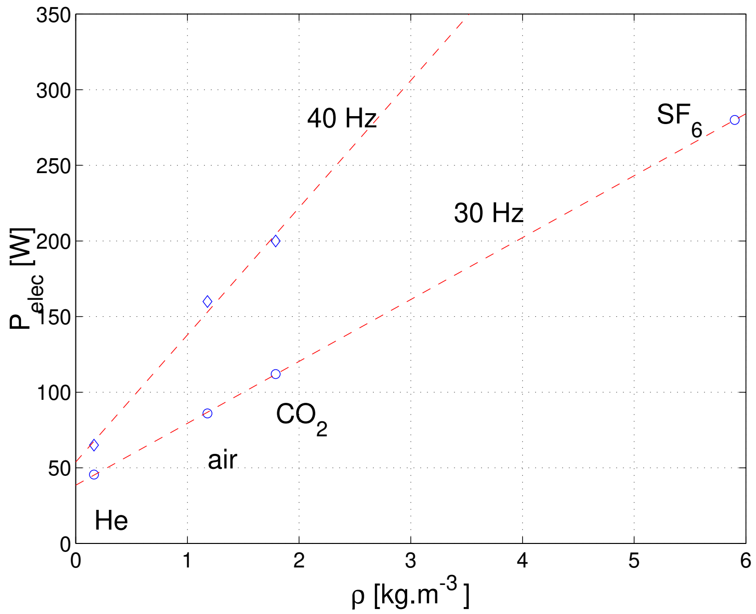

Fig. V.3: Puissance électrique injectée ($\mathcal{P}_{\text{élec}} = U.I$) dans le dispositif en fonction de la masse volumique du gaz utilisé dans le dispositif expérimental *machine à laver*.

Les disques sont séparés par une distance de **32** cm. La vitesse de rotation, comprise entre 10 et 40 Hz, est imposée par une tension d'alimentation constante ($U = Cte$) choisie à l'aide d'un stroboscope. L'essentiel des mesures a été enregistré à F_{rot} =30 Hz ; ce sont ces données que nous utilisons ici. La température est mesurée grâce à un thermocouple baignant dans le gaz. En plus de l'air, nous avons utilisé trois gaz différents : hélium (He, $\mathcal{M} = 4\,\text{g.mol}^{-1}$), dioxyde de carbone ($CO_2$, $\mathcal{M} = 44\,\text{g.mol}^{-1}$) et hexafluorure de soufre (SF_6, $\mathcal{M} = 146\,\text{g.mol}^{-1}$). Les fiches de sécurité des gaz sont reportées en Annexe E.

L'utilisation de 4 gaz différents (He, air, CO_2, SF_6) pose encore un autre problème expérimental : l'étalonnage de l'anémomètre à film chaud. En effet, si une petite soufflerie existait au laboratoire pour l'étalonnage dans l'air, nous ne disposions d'aucun dispositif d'étalonnage dans un autre gaz. Nous avons dû mette en place un protocole d'étalonnage adapté, décrit dans l'annexe C.

1.3 Estimation des grandeurs globales

L'estimation des grandeurs globales décrivant un écoulement turbulent donne souvent lieu à discussion. Tout dépend bien sûr des quantités accessibles en pratique : écoulement simulé ou réel, moyens de mesure disponibles ou non. Nous renvoyons aux comptes-rendus du G.D.R. de Turbulence [174] et à l'article de Mordant *et al.* [117] pour des discussions détaillées. Autant que faire se peut, nous avons tâché de respecter les méthodes préconisées pour estimer les grandeurs $R_\lambda, \bar{\varepsilon}, \eta, \lambda, L \ldots$.

Estimation de $\bar{\varepsilon}$. Nous nous sommes appliqué à mesurer systématiquement la température et son évolution (voir annexe D), ainsi que la puissance moyenne consommée par les moteurs d'entraînement des disques. Ces mesures effectuées pour plusieurs gaz de densités ρ différentes nous permettent d'accéder à $\bar{\varepsilon}$, taux de dissipation moyen dans l'écoulement, ce qui nous évite de faire appelle à un calcul de la dérivée (numérique, donc bruitée) du signal de vitesse issu de l'anémomètre à film chaud.

La puissance électrique fournie au dispositif est accessible grâce aux courant et tension mesurés en sortie des alimentations des moteurs. Les fluctuations et les couples mis en jeu sont suffisamment faibles ici pour que cette démarche soit fiable (ce qui n'est pas le cas dans l'eau). La figure V.3 représente la puissance électrique injectée $\mathcal{P}_{\text{élec}}$ dans le dispositif n^{o}2 en fonction du gaz utilisé (He, air, CO_2 et SF_6), à vitesse de rotation fixée (30 ou 40 Hz). Elle se décompose en deux termes :

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = \mathcal{P}_{\text{pertes}} + \mathcal{P}_{\text{visq}} \tag{V.1}$$

où $\mathcal{P}_{\text{pertes}}$ décrit les pertes dues aux frottements au niveau des différentes parties mécaniques ainsi que les pertes Joule, et $\mathcal{P}_{\text{visq}}$ décrit la puissance de la dissipation visqueuse dans le gaz. Remarquons d'ores et déjà qu'une diminution de la viscosité cinématique se traduit par l'abaissement de l'échelle de Taylor λ et de l'échelle de Kolmogorov η. Le comportement linéaire de $\mathcal{P}_{\text{élec}}$ avec la masse volumique ρ fournit plusieurs informations très précieuses quant à ces deux termes :

(a) l'ordonnée à l'origine correspond à la puissance dissipée indépendamment du gaz utilisé : c'est $\mathcal{P}_{\text{pertes}}$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{pertes}} &\simeq 39 \text{ W}, \quad \text{à } 30 \text{ Hz}, \\ \mathcal{P}_{\text{pertes}} &\simeq 52 \text{ W}, \quad \text{à } 40 \text{ Hz}. \end{aligned} \tag{V.2}$$

On peut supposer avec une bonne approximation que cette fraction de puissance ne participe pas ou très peu à l'échauffement du dispositif. C'est la fraction restante $\mathcal{P}_{\text{visq}} = \mathcal{P}_{\text{élec}} - \mathcal{P}_{\text{pertes}}$ qu'il faut considérer.

(b) la *dépendance linéaire*

$$\mathcal{P}_{\text{visq}} \propto \rho \tag{V.3}$$

de $\mathcal{P}_{\text{visq}}$ avec la masse volumique ρ est cohérente avec le raisonnement dimensionnel classique qui prédit

$$\mathcal{P}_{\text{visq}} = \alpha \underbrace{(\rho R^3).(R\Omega)^2}_{\sim m\, v^2}.\Omega = \alpha \rho \Omega^3 R^5 \tag{V.4}$$

Avec $\Omega = 2\pi \times 30$ rad.s^{-1} et $R = 10,7$ cm nous obtenons

$$\alpha \simeq 0,4 \tag{V.5}$$

Ces résultats sont tout à fait cohérents avec les mesures présentées par O. Cadot dans sa thèse [34]. Les études similaires précédentes avaient porté sur la dépendance en R et en Ω. Nous vérifions ici *la dépendance en ρ*. Ainsi, nous pouvons prédire la puissance dissipée $\mathcal{P}_{\text{visq}}$ par une expérience utilisant le SF_6, soit environ 240 W (vérifié par la suite expérimentalement). L'étude de la température $T(t)$ du gaz laissait alors prévoir une augmentation de température de 60°C environ en quelques dizaines de minutes, laissant présager une grande variation de température sur la durée d'une acquisition (une quinzaine de minutes environ). Par conséquent, nous avons installé un système de refroidissement par un serpentin à eau permettant de maintenir le dispositif à une température proche de la température ambiante (voir annexe D).

(c) Nous observons que, quel que soit le gaz utilisé, l'écoulement sera caractérisé, à fréquence de rotation F_{rot} fixée, par le même taux de dissipation turbulente. Par exemple à 30 Hz dans le dispositif n^{o}2 :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\mathcal{P}_{\text{visq}}}{\rho V} = Cte \simeq 1900 \text{ W.kg}^{-1} \tag{V.6}$$

Dans le dispositif n^{o}2, nous avons travaillé à *taux de dissipation moyen* $\bar{\varepsilon}$ *constant* dans les 4 gaz. Dans le dispositif n^{o}1 (plus petit), on trouve à la même fréquence de rotation dans l'air :

$$\bar{\varepsilon} \simeq 2600 \text{ W.kg}^{-1} \tag{V.7}$$

Comme $\bar{\varepsilon} = \alpha R^2 \Omega^3$, à fréquence de rotation fixée, $\bar{\varepsilon}$ est d'autant plus grande que le dispositif est petit (R plus petit).

Estimation de u_{rms}. Les fluctuations de vitesse sont estimées à partir des mesures de l'anémomètre à fil chaud. Dans le dispositif n^{o}1, à $F_{rot} = 30$ Hz, on obtient :

$$u_{rms} \simeq 4.2 \text{ m.s}^{-1} \tag{V.8}$$

Dans le dispositif n^{o}2, grâce à un simple argument dimensionnel, on s'attend à observer à grand Reynolds

$$\bar{\varepsilon} \sim \frac{\text{puissance}}{\text{masse}} \sim \frac{\rho R^2 u_{rms}^3}{\rho R^3} \sim \frac{u_{rms}^3}{R} \tag{V.9}$$

Or nous savons d'après (V.6) que le taux de dissipation $\bar{\varepsilon}$ est constant. On ne doit donc pas non plus observer de variations de u_{rms} d'un gaz à l'autre, toutes choses égales d'ailleurs (géométrie et vitesse de rotation des disques). Cet argument se trouve renforcé par le fait qu'en changeant de gaz, seules les petites échelles de l'écoulement sont affectées. L'allure moyenne de la vitesse n'est que très peu modifiée, le spectre en $\sim k^{-5/3}$ n'accordant qu'une importance relativement faible aux plus petites échelles. A $F_{rot} = 30$ Hz, nous observons effectivement à partir des enregistrement de l'anémomètre à film chaud pour les trois gaz air, CO_2 et SF_6 :

$$u_{rms} \simeq Cte \simeq 3.6 \text{ m.s}^{-1} \tag{V.10}$$

Notons au passage que cette observation est plutôt rassurante quant à la qualité de nos étalonnages de l'anémomètre pour les différents gaz. Dans l'hélium, on obtient une valeur plus faible :

$$u_{rms} \simeq 2.4 \text{ m.s}^{-1} \tag{V.11}$$

Nous verrons (§ 4.1) que cette différence est due à la présence du fil à l'intérieur de la couche limite, et non en dehors comme espéré.

Estimation de P_{rms}. Les enregistrements de la pression nous donnent directement accès à la valeur quadratique moyenne de la pression P_{rms}. Dans le dispositif n^{o}2, nous observons pour les 4 gaz utilisés :

$$\frac{P_{rms}}{\rho} \simeq Cte \simeq 24 \ (\mathrm{m.s}^{-1})^2 \tag{V.12}$$

Les ordres de grandeurs mesurés dans (V.10) et (V.12) sont tels que

$$\left(\frac{P_{rms}}{\rho}\right)^{1/2} \simeq 1.4\, u_{rms} \tag{V.13}$$

Estimation de λ et R_λ. Nous utilisons la relation classique :

$$\bar{\varepsilon} \simeq 15\nu \frac{u_{rms}^2}{\lambda^2} \tag{V.14}$$

pour en déduire

$$\lambda \simeq \left(\frac{15\nu}{\bar{\varepsilon}}\right)^{1/2} u_{rms}. \tag{V.15}$$

Dans le dispositif n^{o}1, on obtient ($F_{rot} = 30Hz$) $R_\lambda \simeq 340$. Dans le dispositif n^{o}2, on a aussi :

$$\lambda \simeq 2.8 \left[\frac{\mu}{\rho\bar{\varepsilon}} \frac{P_{rms}}{\rho}\right]^{1/2} \tag{V.16}$$

Nous estimons alors le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor par

$$R_\lambda \simeq \frac{u_{rms}\lambda}{\nu} \simeq 2,1 \underbrace{\frac{P_{rms}}{\rho} \frac{1}{(\mu\bar{\varepsilon})^{1/2}}}_{\sim Cte} .\rho^{1/2} \tag{V.17}$$

Les grandeurs globales moyennes estimées dans les différents dispositifs utilisés sont regroupées dans le tableau V.2 ci-dessous.

	$\mathcal{M}$[g.mol^{-1}]	$\bar{\varepsilon}$[W.kg^{-1}]	$P_{rms}[Pa]$	u_{rms}[m.s^{-1}]	R_λ	λ(mm)
cuve plexi						
air	29	2600	50	$4,0$	340	$1,3$
cuve laiton						
He	4	1900	4	$2,4$	100	$3,5$
air	29	1900	28	$3,5$	290	$1,3$
CO_2	44	1900	46	$3,6$	400	$0,92$
SF_6	146	1900	146	$3,7$	840	$0,44$

Tab. V.2: Caractéristiques globales des écoulements étudiés pour $F_{rot} = 30$ Hz dans le dispositif n^{o}1 (air), et dans le dispositif n^{o}2 refroidi (4 gaz).

Conclusion. Nous avons utilisé deux dispositifs similaires, sur le modèle de la *machine à laver* (géométrie de von Kármán). A chaque fois le fluide est un gaz, le plus souvent l'air. Les fréquences de rotation varient de 10 à 40 Hz, mais les données exploitées dans ce mémoire correspondent à $F_{rot} = 30\ Hz$. Nous avons mesuré le taux de dissipation moyen $\bar{\varepsilon}$. Lors de l'utilisation des quatre gaz différents on a $\bar{\varepsilon} \simeq Cte$. Nous avons aussi accès aux fluctuations de pression P_{rms} ainsi qu'à la vitesse quadratique moyenne u_{rms}. Dans le dispositif n^{o}2, nous avons pu observer que $P_{rms}/\rho \simeq Cte$ et $u_{rms} \simeq Cte$ lorsque ρ varie. De plus les ordres de grandeurs sont comparables puisque $P_{rms}/\rho \simeq 1.8 u_{rms}^2$. Ces observations en fonction de la densité du fluide présentent une vraie originalité. Elles nous ont permis de vérifier quelques arguments dimensionnels, et de les exploités pour estimer proprement $\bar{\varepsilon}$, λ et R_λ (tableau V.2).

1.4 Qualification des données

La figure V.4 montre des tranches typiques de signaux de vitesse et de pression. On peut voir –fig. V.4(b)– les profondes dépressions caractéristiques du passage de filaments sur le capteur [35, 62]. On peut déjà remarquer sur les enregistrements de vitesse –fig. V.4(a)– une augmentation de la vitesse associée aux dépressions. Remarquons aussi que ce signal est redressé –voir les densités de probabilité représentées fig. V.4(c) et (d). Le film chaud n'étant sensible qu'au module de la vitesse, ce redressement est dû d'une part à la proximité de la paroi, et d'autre part à l'oscillation de la zone turbulente (couche de cisaillement) au centre du cylindre. Il existe des périodes pendant lesquelles la vitesse moyenne s'annule. Cependant, c'est essentiellement un effet de la dynamique lente à grande échelle. En effet, un simple filtrage passe-haut à 4 Hz rend la distribution plus symétrique. La distribution des accroissements sur des grands intervalles de temps τ est à peu près gaussienne comme d'habitude. Enfin, les spectres respectent des comportements tout à fait classique où l'on peut reconnaître des zones obéissant aux traditionnelles lois de Kolmogorov –fig. V.4(e) et (f).

2 Détection des filaments

Très souvent, la détection de structures cohérentes dans un écoulement turbulent tridimensionnel a été appliquée directement sur le signal de vitesse : à partir de versions filtrées passe-haut de la vitesse [78], en seuillant les coefficients d'ondelettes [36], ou en utilisant la méthode MMTO [16]. Nous avons choisi d'identifier les structures cohérentes aux faibles valeurs brutalement visitées par le signal de pression, comme l'avait fait avant nous O. Cadot [34].

Plusieurs méthodes, plus ou moins sophistiquées, existent "sur le marché" [4, 34, 45, 144] pour détecter les dépressions. Toutes ne détectent pas réellement exactement les mêmes événements. En particulier il faut nettement distinguer des autres la méthode à base d'ondelette proposée dans [144]. En effet, cette méthode permet théoriquement de repérer des événements d'amplitude éventuellement très faible. Cependant elle semble détecter systématiquement des événements très étendus. Elle aboutit d'ailleurs à notre avis à

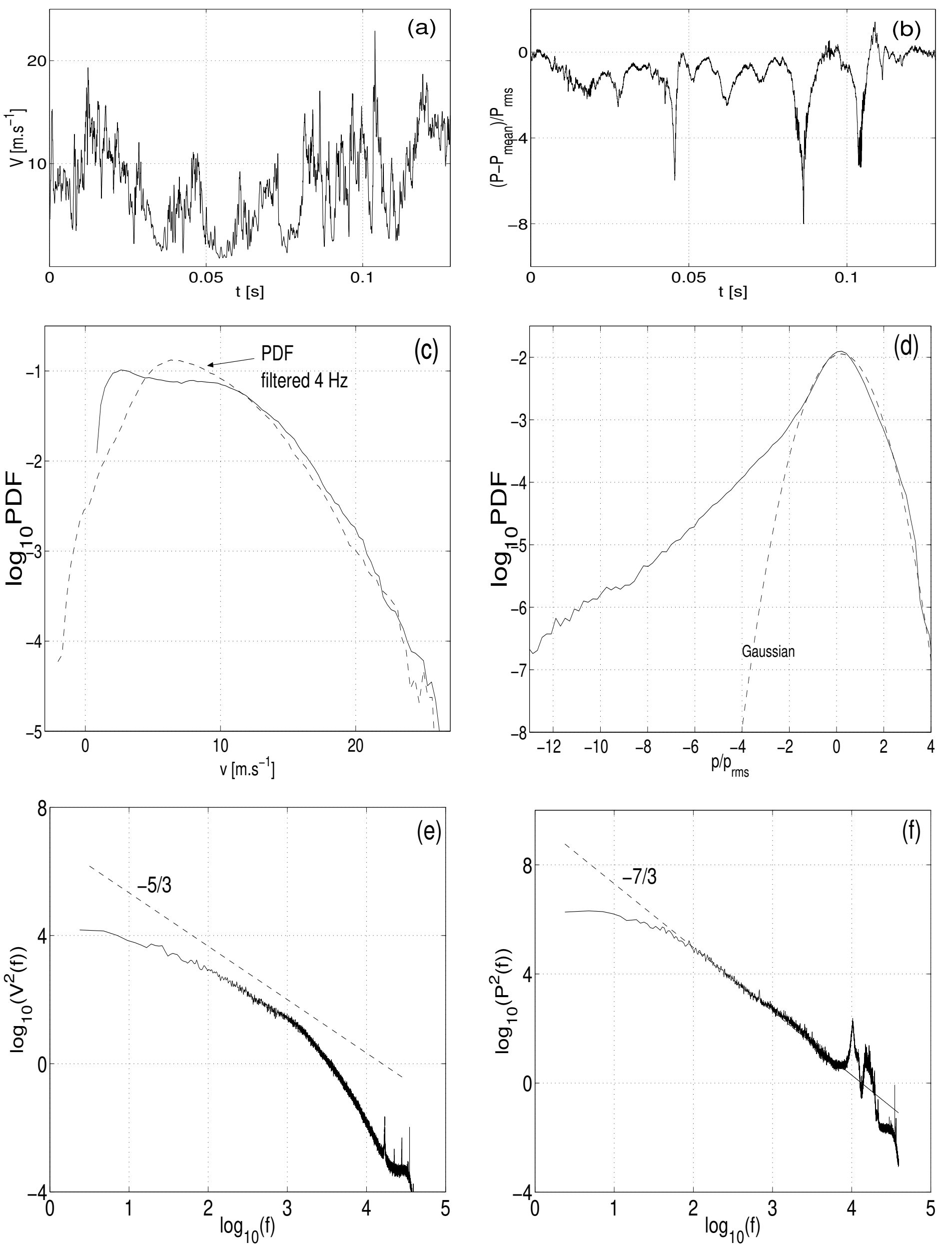

Fig. V.4: Caractéristiques de l'écoulement (a) signal de vitesse ; (b) signal de pression ; (c) & (d) : densités de probabilité associées ; (e) & (f) spectres de puissance. Ici $F_{rot} = 30$ Hz.

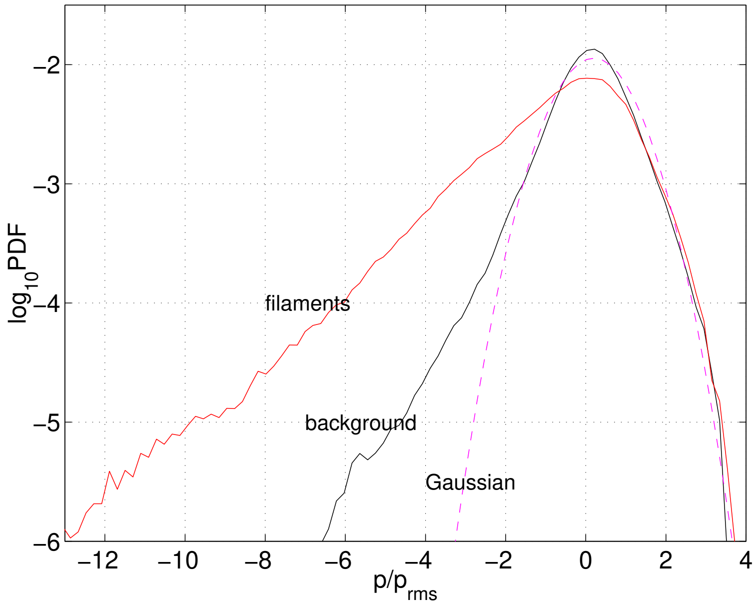

Fig. V.5: **Densité de probabilité conditionnelle du signal de pression.** La densité de probabilité du signal correspondant aux filaments seuls est estimée sur des fenêtres de taille fixée autour des instants de détection ; celle du fond turbulent est obtenue à partir du reste du signal.

une surestimation de la taille des structures cohérentes : il ne s'agit sans doute pas des filaments auxquels nous nous intéressons. Pour notre part nous avons utilisé deux méthodes : la détection à seuil, déjà proposée dans [34], et une détection sur un "cumulant local" mesurant théoriquement un écart local à la gaussianité que nous avons développée [45, 46]. En pratique, après un relatif enthousiasme pour cette dernière méthode conceptuellement assez satisfaisante, notre expérience suggère qu'elle n'apporte rien d'essentiel par rapport à une simple détection à seuil. Les résultats sont qualitativement et quantitativement tout à fait similaire avec l'une ou l'autre de ces deux méthodes. La détection à seuil étant de loin la plus simple à mettre en œuvre c'est celle que nous recommanderions aujourd'hui. Les résultats présentés dans [46] à partir des mesures effectuées dans la première configuration (celle du 1.2.1) utilisent la détection à partir du "cumulant local". Les travaux postérieurs, notamment à partir du dispositif du 1.2.2 pour 4 gaz différents, sont fondés sur une détection à seuil.

2.1 Détection à seuil

Nous revenons brièvement sur la mise en œuvre d'une détection à seuil des dépressions. Une telle méthode est entièrement contrôlée par deux points critiques : le choix du seuil, et la méthode de mise en œuvre. Un seuil à -4P$_{rms}$ semble représenter un bon compromis (la question est bien discutée dans [34]). Pratiquement tous les événements détectés correspondent bien à de "jolies" dépressions, et seuls quelques événements pour lesquels la dépression est de faible profondeur passent inaperçus. La figure V.5 montre les den-

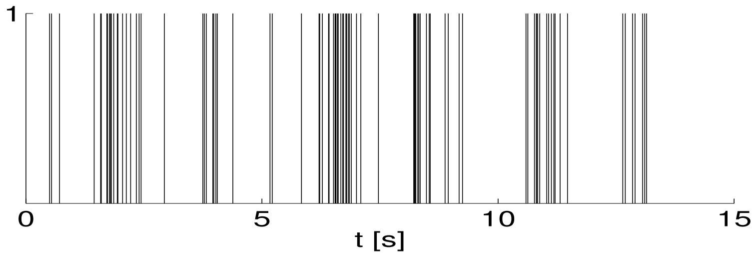

Fig. V.6: **Listes de détection, méthode du cumulant.** Une ligne verticale est dessinée à chaque instant de détection. Les événements sont détectés par paquets.

sités de probabilités conditionnelles de la pression. Celle associée aux filaments présente une aile à décroissance quasi exponentielle vers les basses pressions : les filaments sont les principaux responsables de la décroissance exponentielle de la densité de distribution de la pression vers les basses pressions [4, 34]. Celle correspondant au reste du signal est plus proche d'une gaussienne[1]. La distribution associée au fond turbulent n'est pas tout à fait gaussienne. C'est certainement en partie dû aux défauts de notre détection. Cependant, il n'est pas forcément étonnant qu'on ne retrouve pas une loi gaussienne puisqu'il n'est pas évident qu'il existe des solutions à marginale gaussienne de l'équation de Poisson qui gouverne la pression :

$$\Delta p = -\rho(\omega^2 - \sigma^2) \tag{V.18}$$

L'algorithme de détection (soit sur les minima de pression, soit sur les maxima du cumulant C_4 local) est le suivant. Tout d'abord, on repère l'ensemble des valeurs de k auxquels le seuil fixé à la main est franchi (ex : $P < -4P_{rms}$). A l'intérieur d'une tranche de taille Δ où une détection a eu lieu, l'instant précis k_i auquel a eu lieu l'événement est défini comme l'instant k tel que $P(k)$ est minimum (resp. $C_4(k)$ maximum). Nous imposons alors que l'intervalle de temps minimal entre deux événements successifs soit supérieur à $\sim T_{rot}/5$. Ceci est cohérent avec les travaux antérieurs [35] qui ont fait apparaître un temps d'attente moyen de $10T_{rot}$. Nous ne pourrons enregistrer des durées inférieures à $\sim T_{rot}/5$ entre deux détections successives (ce qui n'est pas très gênant en pratique).

2.2 Statistique des temps d'attente

La figure V.6 est obtenue en traçant un trait vertical à chaque instant de détection. Elle montre que les événements semblent arriver par paquets, par bouffées, ce qui devrait ressortir dans l'histogramme des temps d'attente. A partir de 100 listes de chacune 90 événements environ (8892 événements au total) nous avons estimé la densité de probabilité des temps d'attente (dispositif n^{o}1) présentée sur la figure V.7. La représentation lin-log de la figure V.7(a) suggère qu'une loi de Poisson de temps caractéristique $\tau \sim 20T_{rot}$

[1] C'est cette observation qui avait motivé le développement de la méthode à "cumulant local".

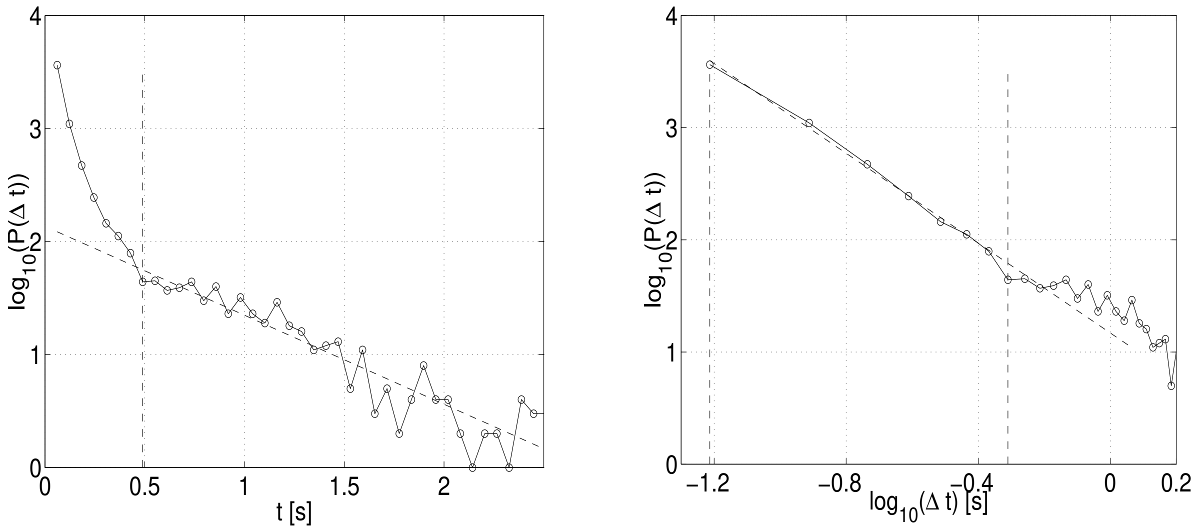

Fig. V.7: **Fonctions densité de probabilité des temps d'attente entre les dépressions.** (à g.) représentation lin-log : cette distribution est bien modélisée par une loi exponentielle, souvent associée à une loi de Poisson ($\sim \exp(-t/\tau)$, $\tau \sim 20\,T_{rot}$) aux temps longs ($\Delta t > 15\ T_{rot}\ \sim 0.5s$) ; (à dr.) cette représentation log-log semble indiquer qu'une loi de puissance ($\sim \Delta t^{-2}$) pourrait modéliser assez correctement la distribution aux temps courts.

pourrait modéliser correctement les temps longs ($\Delta t > 15T_{rot}$), mais montre un écart net à cette loi aux temps courts. La représentation log-log de la figure V.7(b) indique qu'une loi de puissance ($\sim \Delta t^{-2}$) pourrait rendre compte de cette partie de la distribution. Une distribution en loi de puissance pourrait être associée à une corrélation statistique [1, 157]. Il faut remarquer que l'échelle de temps $\sim 15T_{rot}$ qui sépare ces deux comportements est un ordre de grandeur plus grand que le temps de retournement T_{rot}. Ce temps pourrait s'interpréter comme un temps de corrélation maximal entre les événements.

Une autre hypothèse semble plausible. Lorsqu'on représente $P(\log_{10}\Delta t)$ on voit apparaître deux modes dans la distribution, soit deux temps caractéristiques. Une telle allure est caractéristique de la combinaison de deux lois de Poisson, l'une de temps caractéristique $\tau_1 \sim 1,2T_{rot}$ et l'autre de temps caractéristique de l'ordre de $\tau_2 \sim 26T_{rot}$ (fig. V.8). En effet, lorsque :

$$P(\Delta t) = \alpha\frac{e^{-\Delta t/\tau_1}}{\tau_1} + (1-\alpha)\frac{e^{-\Delta t/\tau_2}}{\tau_2}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{V.19}$$

on a

$$P(\ln\Delta t) \;=\; \Delta t\; P(\Delta t) \;=\; \alpha\Delta t\;\frac{e^{-\Delta t/\tau_1}}{\tau_1} \;+\; (1-\alpha)\Delta t\;\frac{e^{-\Delta t/\tau_2}}{\tau_2}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{V.20}$$

de sorte que $P(\ln\Delta t)$ présente deux maxima en $\Delta t = \tau_1$ et $\Delta t = \tau_2$. C'est semble-t-il ce que nous voyons ici.

Quelles que soient les lois statistiques réelles, les dépressions arrivent donc par paquets se produisant tous les 20 à 30 T_{rot} environ et comprenant une bouffée de dépressions

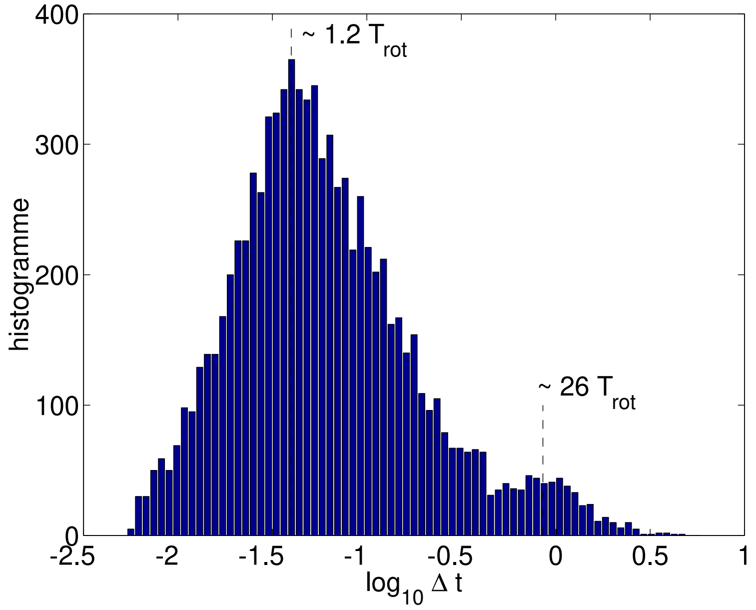

Fig. V.8: **Histogramme du logarithme des temps d'attente entre les dépressions.** On obtient ce type de distribution bimodale lorsque $P(\Delta t)$ est la combinaison linéaire de deux lois exponentielles, souvent associées à la superposition de deux lois de Poisson : $P(\Delta t) = \alpha \exp(-t/\tau_1)/\tau_1 + (1-\alpha)\exp(-t/\tau_2)/\tau_2$,avec $\tau_1 \simeq 1,2\,T_{rot}$ aux temps courts , et $\tau_2 \simeq 26\,T_{rot}$ aux temps longs ($\Delta t > 15\,T_{rot} \sim 0.5s$).

séparées par 1 à 2 T_{rot} environ. C'est sans doute l'oscillation lente de la couche centrale de cisaillement devant le capteur qui explique ces arrivées en paquets relativement espacés. Ces observations sont cohérentes avec les résultats des références [1, 4, 78] où une coupure autour $\Delta t \sim 10\ T_{rot}$ avait déjà été observée. Dans [34], un écart à la loi de Poisson était observé pour $\Delta t < T_{rot}$. Dans [144] au contraire, une loi de Poisson pure semblait convenir, mais sur la base d'une définition différente des événements détectés.

2.3 Description des événements détectés : profils moyens

Nous nous intéressons à la signature temporelle typique associée aux dépressions dans les signaux de vitesse et de pression. Une moyenne synchrone sur les tranches de signaux centrées sur les instants k_i de détection donne les profils moyens représentés figure V.9. Comme prévu, le profil moyen du signal de pression est une chute de pression de $-4P_{rms}$ environ. De plus, bien que la détection ait lieu sur la pression, un profil non-trivial est mis en évidence dans le signal de vitesse : les dépressions sont associées à l'existence de structures possédant un profil de vitesse particulier dans l'écoulement turbulent. Une moyenne sur des instants choisis au hasard donne une signature plate. Nous avions déjà présenté une étude détaillée de ces profils dans [45]. Nous ne revenons ici pour mémoire que sur quelques points essentiels.

D'après les observations expérimentales [34, 35, 61, 62, 112], on s'attend à ce que

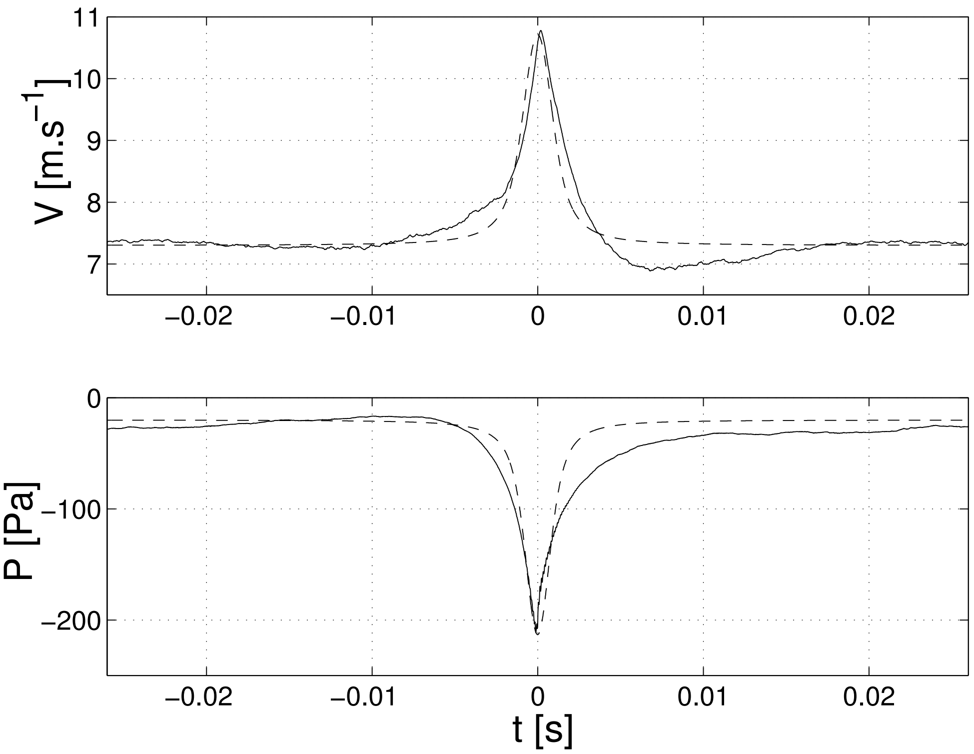

Fig. V.9: **Profils moyens des structures cohérentes.** Les profils obtenus par une moyenne conditionnée aux instants de détection des dépressions sont représentés en trait plein. Ils sont comparés aux profils issus d'un vortex de Brugers (en pointillé). Les paramètres du modèle sont : $U = V_{moy} = 7.3\text{m.s}^{-1}, max(\mid \Delta P \mid) = max(\mid \Delta P_{sig} \mid) = 200 \text{ Pa}, \alpha = 0, \delta = 1.4 \text{ mm}, \ r_0 = 3.2 \text{ mm}.$

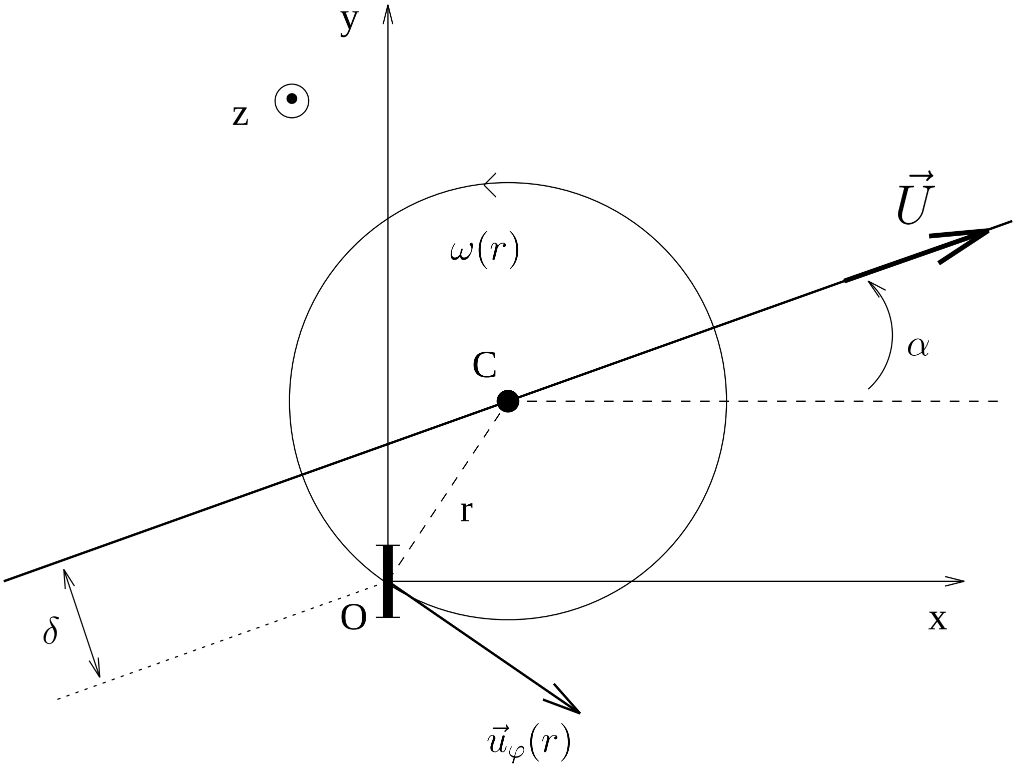

Fig. V.10: **Description schématique du passage d'un tourbillon filamentaire sur le fil chaud.** La paroi est parallèle au plan (Oxy). Le fil chaud et le capteur de pression se trouvent à l'origine O. Le tourbillon est aligné sur l'axe (Oz) et advecté à la vitesse $\vec{U}$.

les profils moyens correspondent au passage de filaments de vorticité au voisinage des capteurs. On peut modéliser le passage d'un tourbillon près des capteurs et comparer les signaux attendus et observés. Pour des raisons de simplicité, on choisit d'utiliser le vortex de Burgers comme référence, mais les résultats rapportés ci-dessous ne dépende pas de ce choix de façon cruciale.

Rappelons tout d'abord quelques notations utiles. Pour un vortex de Burgers rectiligne, parallèle à l'axe Oz et de vorticité $\omega(r) = \omega_0 e^{-\gamma r^2/4\nu}$, les champs de vitesse et de pression sont donnés par :

$$u_r = -\frac{1}{2}\gamma r \ , \quad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\left(\frac{r}{2r_0}\right)^2}\right) \ , \quad u_z = \gamma z \ , \tag{V.21}$$

$$p(r) = -\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2}\int_{r/r_0}^{\infty}\frac{(1-\exp(-x^2/4))^2}{x^3}dx \, , \tag{V.22}$$

où (x, y, z) et (r, ϕ, z) sont les coordonnées cartésiennes et cylindriques, γ est le taux d'étirement du vortex, $r_0 = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}}$ son rayon caractéristique et $\Gamma = \pi r_0^2 \omega_0$ sa circulation. Les mesures étant effectuées près de la paroi ($\sim 2 - 3$ mm), nous considérons que, en première approximation et en accord avec les observations précédentes [34, 35], les tourbillons détectés sont perpendiculaires à la paroi. Nous négligeons la vitesse axiale devant la vitesse azimuthale. Cette approximation est justifiée a posteriori par le fait que

$$\frac{\Gamma}{4\pi\nu} \gg 1.$$

Ainsi, pour un tourbillon localement advecté à la vitesse $\vec{U}$, à la distance δ du capteur et dans une direction faisant un angle α avec le fil chaud, on mesure (fig. V.10) :

$$u_{meas}(t) = \mid U\cos\alpha + u_\varphi(r)\frac{y}{r} \mid \quad . \tag{V.23}$$

Plusieurs profils sont possibles, en fonction du choix des paramètres du modèle ($U, max(\mid \Delta p \mid), \alpha, \delta$ et r_0). Certaines combinaisons de paramètres ne contribuent pas ou très peu au profil moyen tandis que d'autres contribuent en moyenne à un profil très similaire à celui que l'on observe expérimentalement. Le profil moyen de vitesse est bien représenté par le cas $\alpha = 0$, cohérent avec la symétrie par apport à l'axe Ox (le capteur de pression n'est pas sensible à α). D'autre part, la distance δ entre le filament et le capteur est bornée à la fois inférieurement et supérieurement : δ est nécessairement non-nul ($\delta = 0$ donne un profil plat sur u), et δ doit rester plus petit que $\delta_{max} \sim 5$ mm, sinon la dépression ne serait pas détectée par le capteur de pression. Ainsi δ doit être choisie de l'ordre du millimètre. La vitesse U est de l'ordre d'une vitesse moyenne typique de passage des filaments soit proche de 7 m.s^{-1}. La profondeur de la dépression max($\mid \Delta P \mid$) est ajustée sur la valeur moyenne observée. La figure V.9 montre la comparaison entre les profils moyens observées (trait plein) et un modèle de Burgers (pointillé) pour $\delta = 1.4$ mm et $r_0 = 3.2$ mm. La ressemblance frappante entre le modèle et les mesures confirme les résultats d'études antérieures. Il est légitime d'associer les dépressions à des structures cohérentes de type tourbillonnaire dans cet écoulement turbulent. Le rayon typique des structures que nous détectons est $r_0 \sim 3$ mm, de l'ordre de l'échelle de Taylor ($\lambda \sim 1.3$ mm dans ce cas). Le rayon des plus petits événements que le capteur de pression puisse détecté est de l'ordre de 0.5 mm. Cette conclusion est cohérente avec les résultats de [45, 60, 144, 172] qui ont montré que le diamètre du cœur des tourbillons filamentaires est de l'ordre de l'échelle de Taylor.

Remarque : notons que différentes méthodes de détection (par exemple la "méthode LIM" qui porte sur le signal de vitesse lui-même [36]) peuvent mener à des résultats similaires, les listes de détections étant d'ailleurs comparables.

3 Intermittence et structures cohérentes : une analyse ondelette conditionnée par la pression

Le contenu de ce paragraphe est issu des données récoltées grâce au dispositif n^{o}1 uniquement. Les données récoltées à partir du dispositif n^{o}2 seront étudiées dans le paragraphe 4.

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré que nous détections des objets cohérents dans un écoulement turbulent, et nous avons étudié leurs caractéristiques statistiques. Le but de ce paragraphe est de chercher à mettre en évidence un lien éventuel entre l'existence de structures cohérentes dans l'écoulement, l'intermittence spatio-temporelle, et l'intermittence statistique. Par intermittence statistique nous entendons *écart à l'auto-similarité stricte du champ de vitesse*, ou écart à la théorie K41. Cette évolution a longtemps été étudiée à l'aide des seules fonctions de structure. Dans un premier temps nous comparons les fonctions de structure de l'ensemble du signal de vitesse et les fonctions de structure conditionnelles associées au fond turbulent et aux filaments.

Le calcul de fonctions de structure conditionnelles a déjà été proposé. Dans [1, 4, 144], les fonctions de structure du signal de pression sont comparées à celles du fond turbulent et des filaments, en utilisant une détection sur le signal de pression lui-même. Une détection opérée sur le signal de vitesse lui-même permet d'effectuer des comparaisons entre les fonctions de structure de l'ensemble du signal de vitesse et celles du fond turbulent et des filaments dans [27, 36]. Nous proposons un travail de comparaison similaire utilisant une détection sur le signal de pression. Nous utilisons les fonctions de structure ondelettes (avec valeurs absolues) introduites au **II** 2.4 dont les performances d'estimation ont été étudiée dans le chapitre **IV** :

$$S_q(a = 2^j) \; = \; \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \mid d(j,k) \mid^q \qquad \text{(V.24)}$$

où n_j est le nombre de coefficients à chaque octave j (c'est-à-dire à chaque échelle $a = 2^j$). Pour simplifier, nous ferons l'abus d'écriture $S_q(j) \equiv S_q(a = 2^j)$. Dans un domaine où des lois d'échelles sont vérifiées, on a : $S_q(j) \sim 2^{j\zeta(q)}$.

Des hypothèses habituelles en turbulence et présentées comme des généralisations du modèle de Kolmogorov dit K41 [91], supposent que les fonctions de structure suivent dans la zone inertielle des lois de puissance $S_q(j) \sim 2^{j\zeta(q)}$, et que la non-linéarité des exposants $\zeta(q)$ est une manifestation de l'intermittence. En effet, si les exposants $\zeta(q)$ dépendaient linéairement de q ($\zeta(q) = q/3.\zeta(3)$), les distributions des coefficients d'ondelette pour différentes échelles pourraient être superposées après une simple renormalisation par une loi de similitude dépendant de $\zeta(3)$ seulement : les formes de ces distributions seraient similaires. Au contraire, un écart des $\zeta(q)$ à la linéarité traduit une déformation des distributions, et renvoie au phénomène d'intermittence statistique. L'auto-similarité étendue (E.S.S.) [30] est une méthode d'estimation des exposants $\zeta(q)$ très répandue dans l'étude des lois d'échelle en turbulence. Il s'agit de tester des lois d'échelle relatives entre fonctions de structure, c'est-à-dire $S_q(j) \sim S_p(j)^{\xi(q,p)}$. En turbulence, S_3 joue souvent un rôle privilégié à cause de la relation de Kármán-Howarth [87], et nous définissons $\xi(q) \equiv \xi(q,3)$. Les quantités $\xi(q)$ ainsi définies et les quantités $H(q)$ définies par (II.70) sont semblables, seules les interprétations diffèrent.

3.1 Séparation des coefficients : les 2 "phases"

La transformée en ondelettes est une analyse temps-échelle des données : le coefficient $d_X(j,k)$ contient l'information sur X à l'échelle $a = 2^j$ autour du temps $t = 2^j k$. Nous pouvons calculer des fonctions de structure ondelette conditionnées à une partition du contenu temps-échelle des données. Ainsi nous définissons des fonctions de structure associées au fond turbulent d'une part, et aux filaments d'autre part. Pour cela, nous calculons une transformée en ondelette discrète (DWT) du signal de vitesse et séparons ses coefficients $d_X(j,k)$ en 2 "phases" : les filaments et le fond. Soient k_i les instants où des événements sont détectés. Les coefficients d'ondelette correspondant aux filaments sont tels que le couple (j,k) satisfasse $k_i - \Delta/2 < 2^j k < k_i + \Delta/2$ (où Δ est la taille d'une tranche, cf. 2.1) et sont notés $d_X^{(f)}(j,k)$. Au moins N (nombre de moments nuls de l'ondelette) coefficients sont gardés à chaque échelle pour tenir compte du cône d'influence. Les autres coefficients $d_X(j,k)$ appartiennent au fond turbulent et sont notés $d_X^{(b)}(j,k)$ (b comme *background*). Nous calculons alors trois fonctions de structure :

$$\begin{aligned} S_q(j) &= \frac{1}{n_j} \sum_k |d_X(j,k)|^q \\ S_q^{(f)}(j) &= \frac{1}{n_j^{(f)}} \sum_k |d_X^{(f)}(j,k)|^q \\ S_q^{(b)}(j) &= \frac{1}{n_j^{(b)}} \sum_k |d_X^{(b)}(j,k)|^q , \end{aligned} \tag{V.25}$$

où $n_j^{(f)}$ et $n_j^{(b)}$ sont les nombres de coefficients à l'octave j dans les phases "filaments" et "fond turbulent".

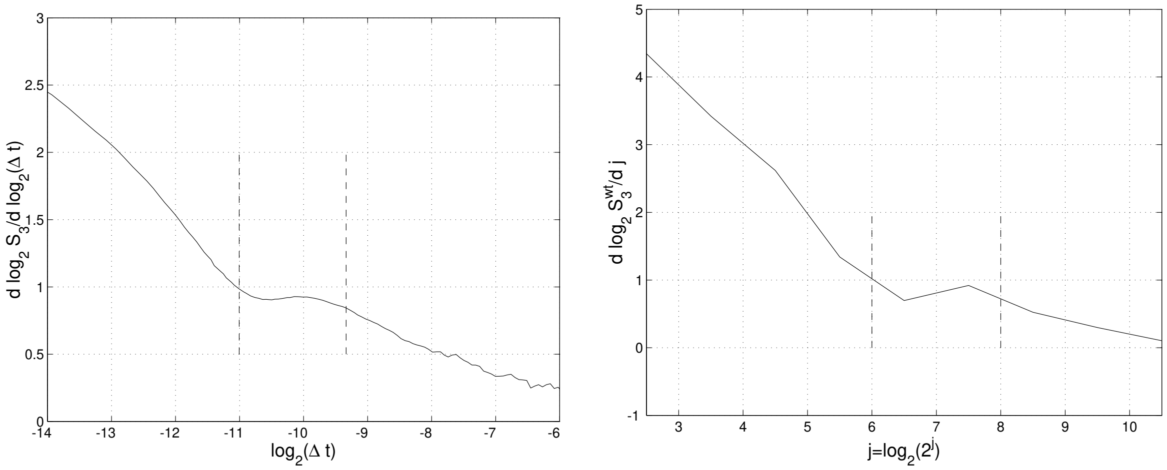

Fig. V.11: **Zone inertielle.** Dérivée du logarithme de la fonction de structure classique d'ordre 3 (gauche) et dérivée du logarithme de la fonction de structure ondelette d'ordre 3 (droite). Les lignes pointillées verticales délimitent la zone inertielle présumée.

3.2 L'analyse "classique" : les exposants des fonctions de structure

Dans une analyse classique de l'intermittence, le rôle principal est tenu par les exposants $\zeta(q)$ et leur comportement en fonction de q. Accroissements ou ondelettes, les procédures d'estimation sont les mêmes. On estime les pentes de régressions linéaires dans des diagrammes log-échelle (Ch. **IV**), $\log S_q$ vs $\log \tau$ ou $\log_2 S_q$ vs $\log_2 a = j$. La difficulté essentielle vient de ce que, à nombre de Reynolds modéré (donc accessible expérimentalement...), on n'observe pas de loi d'échelle au sens stricte. Il faut définir un domaine où une loi d'échelle approchée semble valable : la zone inertielle. Nous avons arbitrairement choisi une zone où aussi bien le spectre d'énergie de la vitesse que les fonctions de structure d'ordre 3 des accroissements et des coefficients d'ondelette approchent relativement bien une loi de puissance. Ce n'est pas un critère objectif, mais il est cohérent avec les méthodes habituelles. Dans les conditions du dispositif n^{o}1, nous obtenons pour les ondelettes :

$$j \in [j_1 = 6, j_2 = 8] \ , \tag{V.26}$$

et pour les accroissements :

$$\tau \in [\sim 0.49ms, \sim 1.5ms], \quad \text{i.e.} \quad r \in [\sim 80\eta, \sim 250\eta] \ . \tag{V.27}$$

S'il est assez simple d'établir une correspondance entre une gamme d'échelles (définie pour la transformée en ondelettes par un facteur de dilatation) et une gamme de fréquences (pour la transformée de Fourier), le lien avec une gamme de durées pour les accroissements reste qualitatif. Cependant, les résultats décrits par la suite ne dépendent pas de ces choix de manière cruciale.

Nous essayons maintenant de comparer les estimations utilisant les fonctions de structure pour des ondelettes différentes (par abus de langage nous assimilons les accroissements

q	$\zeta(q)$	ζ_q^{wt} $N=3$	ζ_q^{wt} $N=5$	ζ_q^{wt} $N=7$	Conf. Int. (WT)
1	0.34	0.29	0.29	0.29	± 0.01
2	0.64	0.56	0.55	0.56	± 0.02
3	0.92	0.79	0.79	0.81	± 0.02
4	1.15	0.99	0.99	1.03	± 0.03
5	1.35	1.15	1.15	1.22	± 0.04
6	1.49	1.24	1.25	1.37	± 0.06
7	1.59	1.26	1.29	1.47	± 0.08

Tab. V.3: **Exposants des fonctions de structure :** $\zeta(q)$ estimés à partir des accroissements, et pour 3 ondelettes différentes. La dernière colonne donne les intervalles de confiance à 95% pour les estimations à base d'ondelettes.

q	ensemble	fond	filaments
1	0.29 ± 0.01	0.31 ± 0.01	0.22 ± 0.02
2	0.56 ± 0.01	0.59 ± 0.02	0.41 ± 0.03
3	0.81 ± 0.02	0.87 ± 0.02	0.57 ± 0.05
4	1.03 ± 0.03	1.14 ± 0.03	0.70 ± 0.07
5	1.22 ± 0.04	1.39 ± 0.04	0.80 ± 0.10
6	1.37 ± 0.06	1.62 ± 0.06	0.85 ± 0.14
7	1.47 ± 0.08	1.85 ± 0.08	0.87 ± 0.19

Tab. V.4: **Exposants des fonctions de structure conditionnelles.** Ce tableau est obtenu pour une ondelette de Daubechies 7 (i.e., $N = 7$) dans la gamme $(j_1, j_2) = (6, 8)$.

à un cas un peu particulier de transformée en ondelette). Les exposants $\zeta(q)$ ont été estimés à partir des accroissements et d'ondelettes pour lesquelles $N = 1, 2, \ldots, 7$ (ondelettes de Daubechies orthonormées à support compact [54]). Le tableau V.3 rassemble les valeurs obtenues (pour N=3,5,7) et les intervalles de confiance à 95%. Les estimés à base d'ondelettes sont systématiquement plus petits que celles utilisant les accroissements. Cet écart peut provenir de la difficulté à définir une correspondance précise entre les gammes de temps (durées τ) et d'échelles (facteur de dilatation a). De plus, l'estimation semble sensible à l'ondelette choisie, même si les valeurs restent pratiquement dans les barres d'erreur. Si le regroupement des valeurs garantit qu'aucun artefact tel qu'une tendance déterministe ou un bruit non-invariant d'échelle n'a pollué les données, les écarts semblent indiquer que les lois d'échelles ne sont pas rigoureusement exactes [6] dans la zone inertielle même si elles représentent une bonne approximation. Enfin, remarquons que la valeur $\zeta^(3) \simeq 0,92$ estimé sur les accroissements est plus petite que 1. Comme nous utilisons les valeurs absolues qui plus est sur des mesures effectuées près d'une paroi, la valeur de $\zeta^(3)$ n'est pas nécessairement soumise à la relation de Kármán-Howarth. Des valeurs similaires sont signalées dans des travaux expérimentaux [132] et numériques [9] en turbulence inhomogène anisotrope.

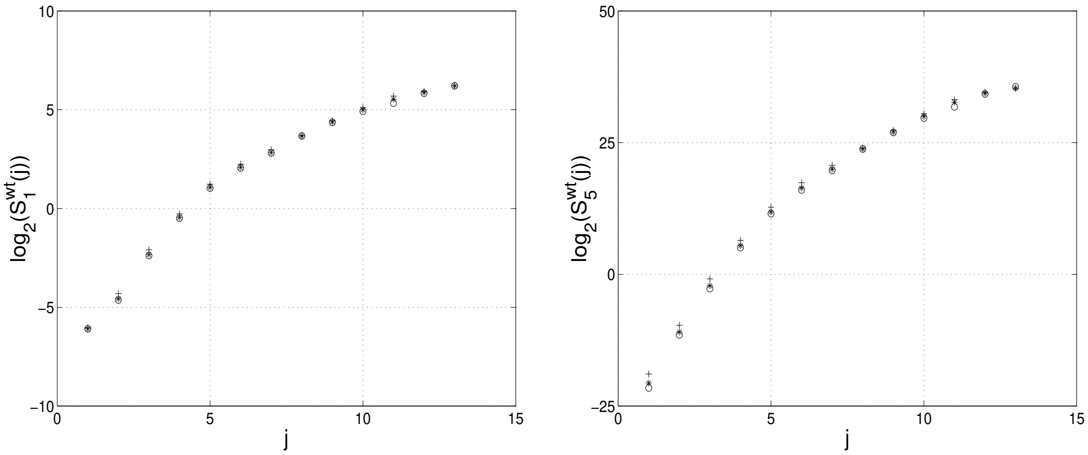

Fig. V.12: **Fonctions de structure ondelette.** $\log_2(S_1)$ (à gauche) et $\log_2(S_5)$ (à droite) en fonction des octaves j pour le signal (*), le fond turbulent (o) et les filaments (+).

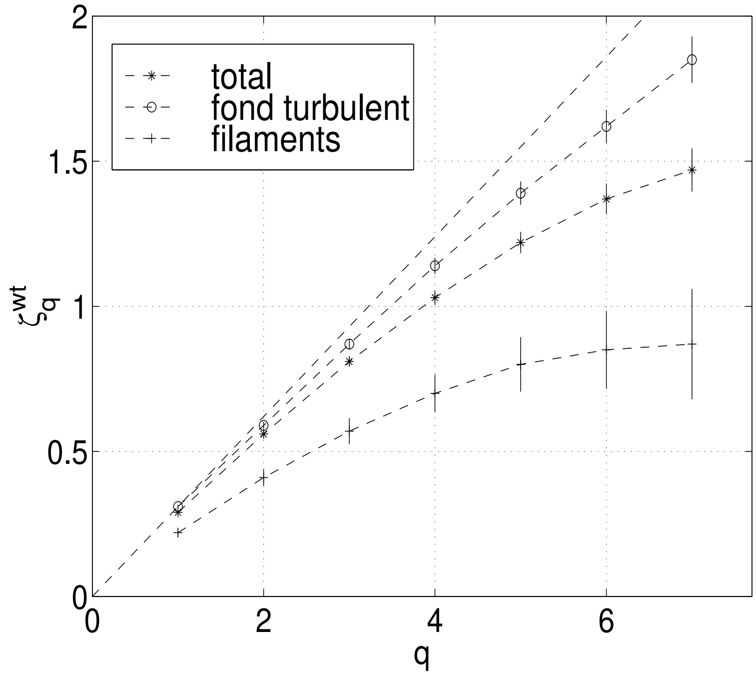

Fig. V.13: **Exposants des fonctions de structure ondelette** en fonction de q pour l'ensemble du signal, le fond et les filaments. La ligne pointillée sert de référence linéaire.

Nous nous intéressons maintenant aux exposants $\zeta(q)$, $\zeta^{(f)}(q)$ et $\zeta^{(b)}(q)$ correspondant respectivement à l'ensemble du signal, aux filaments et au fond turbulent (pour l'ondelette $N = 7$, dans la gamme $[j_1 = 6, j_2 = 8]$). Ces valeurs sont obtenues séparément grâce aux fonctions de structure conditionnelles décrites en 3.1. Un exemple des fonctions de structure pour chacune des phases est représenté figure V.12. Les trois courbes sont très ressemblantes. Si on peut définir des lignes de tangence (donc des exposants) pour le signal de vitesse dans son ensemble, c'est également possible pour les phases "fond turbulent" et "filaments". A nouveau, une légère dépendance en N des $\zeta^{(f)}(q)$ et des $\zeta^{(b)}(q)$ est visible, du même ordre que pour les $\zeta(q)$. L'examen des valeurs récapitulées dans le tableau V.4 révèle d'intéresantes variations. Les exposants $\zeta^{(b)}(q)$, pour le fond, sont plus grands que les $\zeta(q)$, pour l'ensemble, eux-mêmes plus grands que les $\zeta^{(f)}(q)$, pour les filaments seuls. Ces écarts sont quantitativement significatifs : les intervalles de confiance ne se recouvrent pas (nous rappelons que les intervalles de confiance sont ici estimés théoriquement, Ch. **IV**). Les écarts observés entre phases sont un ordre de grandeur plus importants que ceux observés pour une phase donnée lorsqu'on change N. Par conséquent, nous affirmons que les différences observées entre les exposants $\zeta(q)$ estimés pour les trois phases (ensemble, fond, filaments) sont significatifs. De plus nous notons un effet de courbure : la courbe des $\zeta^{(b)}(q)$ est plus proche d'une ligne droite que celle des $\zeta(q)$, et celle des $\zeta^{(f)}(q)$ est plus arrondie (fig. V.13). Les $\zeta^{(f)}(q)$ présentent un écart plus important à la linéarité que les $\zeta^{(b)}(q)$. Ces observations ne sont pas sensibles à l'ondelette choisie, ni à une légère variation de la région d'estimation. Des études menées au voisinage d'une grosse structure cohérente tourbillonnaire rapportent des résultats qui vont dans le même sens [14, 132].

A l'issue d'une telle analyse, on peut être tenté de conclure que le fond turbulent tend à obéir à un comportement de type K41 tandis que les filaments s'en écarteraient. Les filaments seraient donc responsables de l'intermittence statistique. Nous allons montrer en utilisant les cascades log-infiniment divisibles à quel point une telle interprétation peut s'avérer incomplète.

3.3 Filaments et cascades log-infiniment divisibles

Il est difficile de tester, au sens strict du terme, l'existence d'une cascade log-infiniment divisible. Une première méthode consiste vérifier l'existence de lois d'échelles relatives entre les moments absolus, ou de manière équivalente (modulo le problème évoqué dans le chapitre **IV**) l'existence de relations linéaires entre les logarithmes des moments absolus (IV.20). C'est la répartition inhomogène des valeurs estimées aux différentes échelles qui pose problème. Dans un diagramme $\log S_q$ vs $\log S_p$, les points associés aux grandes échelles ont tendance à se regrouper tandis que quelques points associés aux petites échelles s'isolent (fig. V.14). De plus il s'agit d'un diagramme *logarithmique* où tous les points n'ont pas le même poids statistique. Déterminer un critère parfaitement objectif décrivant la qualité de l'alignement des points dans un tel diagramme n'est pas simple. La seconde méthode repose sur la vérification des relations linéaires entre les cumulants du logarithme des valeurs absolues des coefficients d'ondelette (éq. (IV.22)). Cette approche paraît séduisante puisqu'elle examine séparément les différents ordres supérieurs du propagateur. Rappelons que si tous les cumulants d'ordre ≥ 3 sont nuls le propagateur est log-normal.

q	ensemble	fond	filaments
1	0.39	0.39	0.40
2	0.72	0.71	0.72
3	-	-	-
4	1.25	1.26	1.25
5	1.48	1.50	1.48
6	1.69	1.70	1.70
7	1.88	1.89	1.91

Tab. V.5: **Exposants relatifs $H(q)$ des fonctions de structure ondelette, associés au noyau du propagateur $G = \exp(-H)$.** Pentes des diagrammes $\ln S_q^{wt}$ *vs* $\ln S_3^{wt}$, pour une ondelette *Daubechies 7* (i.e., $N = 7$) dans la gamme $(j_1, j_2) = (2, 10)$ séparément pour l'ensemble du signal, le fond turbulent et les filaments.

De plus, pour le signal de vitesse turbulent, les ordres de grandeur sont tels que C_1 est prépondérant devant tous les autres cumulants. Or

$$\log \mathbb{E} \mid X \mid^q = \sum_k \frac{q^k}{k!} C_k(\ln \mid X \mid) \tag{V.28}$$

de sorte que $\log \mathbb{E} \mid X \mid^q$ est essentiellement déterminé par C_1, les cumulants d'ordre supérieur C_2, $C_3 \ldots$ ne jouant que des rôles correctifs. La sensibilité de la première méthode se trouverait ainsi réduite. En pratique, l'obstacle majeur à cette méthode est la difficulté de l'estimation des cumulants. Les coefficients ondelettes sont distribués autour de zéro, point de divergence de la fonction logarithme. Une petite variations des coefficients d'ondelette devient potentiellement très grande lorsqu'on s'intéresse au logarithme des coefficients. L'estimation des cumulants d'ordre supérieur s'avère peu stable. Estimer correctement le cumulant d'ordre 3 réclame une statistique gigantesque. Dasn ces conditions est-il ainsi vraiment plus fiable d'utiliser la seconde méthode pour tester l'existence d'une cascade log-infiniment divisible ? (voir aussi Ch. **IV**).

Nous vérifions ici la relation linéaire (IV.20) entre $\log S_q$ et $\log S_p$ (fig. V.14). Les points sont bien alignés sur des lignes droites pour toutes les paires (p, q), indépendamment pour pour chacune des trois phases. Nous en déduisons que nous pouvons mettre en œuvre le formalisme des cascades log-infiniment divisibles. Ainsi, nous pouvons écrire pour les trois "phases" (ϕ)

$$\ln S_q^{wt(\phi)} = -H^{(\phi)}(q) n^{(\phi)}(a) + C_{q,p}^{(\phi)} \ , \tag{V.29}$$

et exploiter cette relation pour estimer les fonctions $H^{(\phi)}(q)$ et $n^{(\phi)}(a)$. Elles sont définies à une constante multiplicative près, et nous choisissons arbitrairement $H^{(\phi)}(3) = 1$.

Nous estimons $H^{(\phi)(q)}$ par régression linéaire des diagrammes $\log S_q$ vs $\log S_3$ (fig. V.14). Les résultats sont présentés dans le tableau V.5 et la figure V.15. Nous observons que les fonctions $H^{(\phi)}(q)$ sont identiques aux barres d'erreurs expérimentales près pour les trois phases. $H^{(\phi)}$ ne dépend pas de la phase (ϕ). Nous extrayons $n^{(\phi)}(a)$ selon la procédure décrite au **IV**.2.1. L'ordre $q = 3$ est ici choisi comme référence.

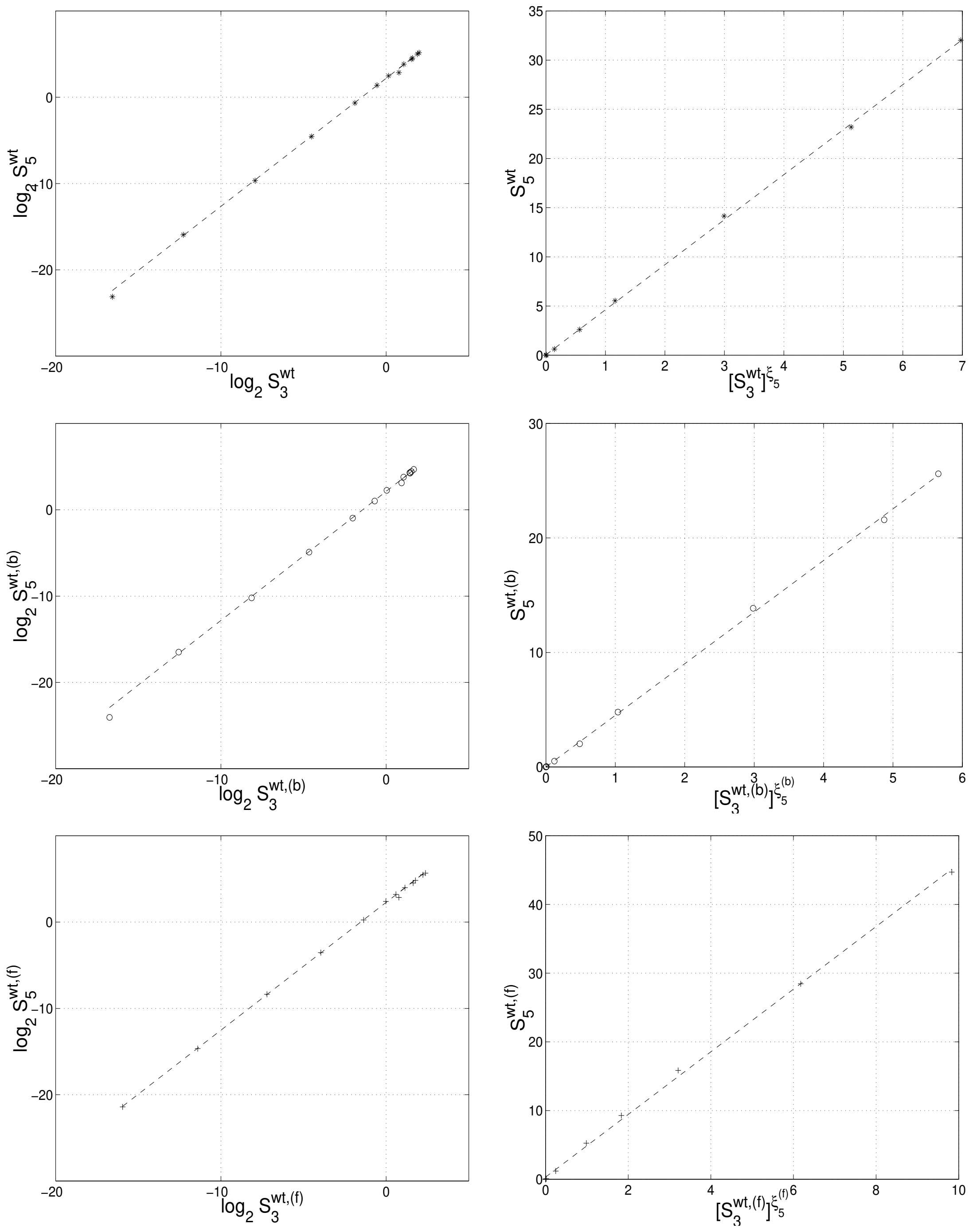

Fig. V.14: **Exemples de diagrammes $\log S_q$ vs $\log S_3$ pour les fonctions de structure ondelette des trois phases :** (à g.) $\log S_5^{wt(\phi)}$ *vs* $\log S_3^{wt(\phi)}$ et (à dr.) diagramme linéaire de $S_5^{wt(\phi)}$ *vs* $(S_3^{wt(\phi)})^{\xi_5^{(\phi)}}$ pour les différentes phases (ϕ) : (en haut) tout le signal, (au milieu) fond turbulent, (en bas) filaments seuls. Remarquons que la loi d'échelle $\xi^{wt,(\phi)}(5,3) = 5/3$ attendue aux plus petites échelles n'est pas observée à cause d'une résolution insuffisante **attention, ici WT !**.

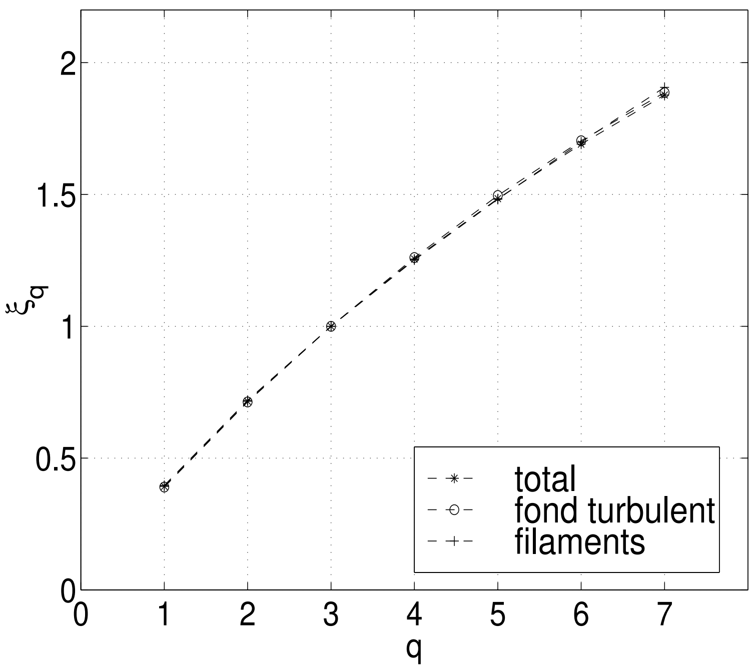

Fig. V.15: **Exposants relatifs $H(q)$ des fonctions de structure ondelette, associés au noyau du propagateur $G = \exp(-H)$, pour les 3 phases.** Il s'agit des estimations pour une ondelette *Daubechies7* (N=7), dans la gamme $(j_1, j_2) = (2, 10)$.

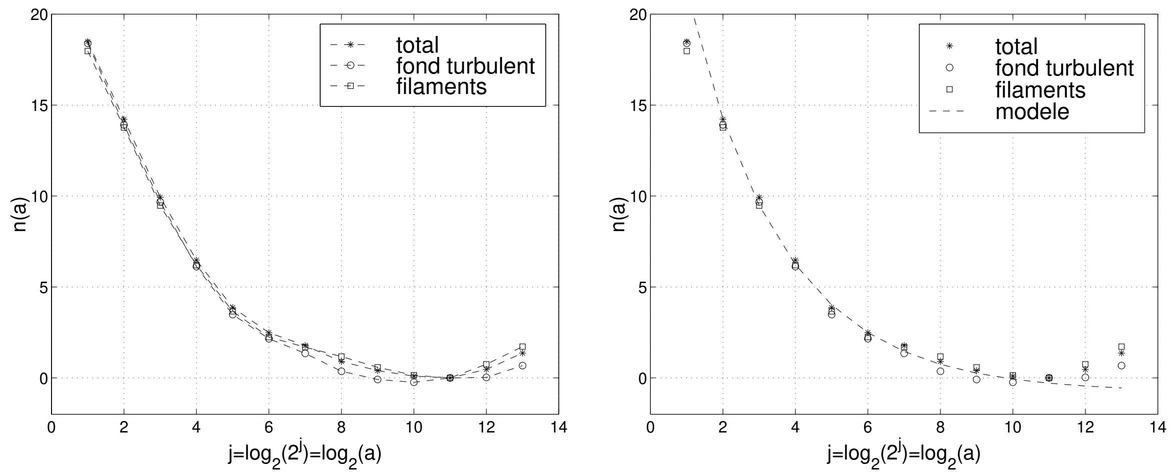

Fig. V.16: **Fonctions estimées $n^{(\phi)}(a)$.** à gauche : $n(j)$, $n^{(b)}(j)$ et $n^{(f)}(j)$ estimés selon la méthode décrite dans le texte ; l'échelle $a' = 2^{11}$ (octave $j = 11$) sert de référence arbitraire (i.e. $n^{(\phi)}(2^{11}) = 0$). à droite : **un modèle pour n(a) ;** $n(a)$ comparée au modèle $n_{approx} \propto \frac{1-a^{-0.55}}{0.55}$ (pointillé).

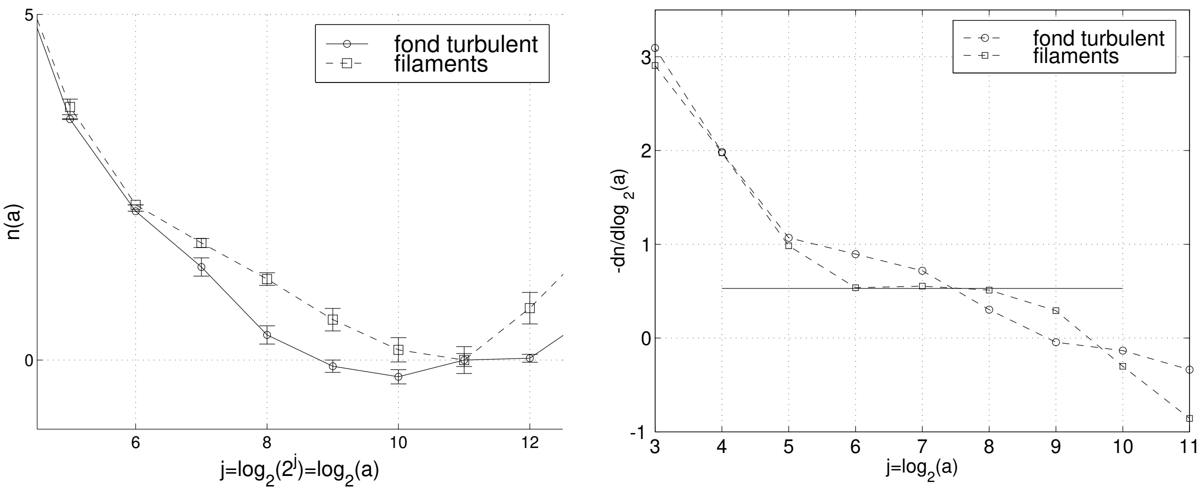

Fig. V.17: A gauche : **agrandissement de $n(a)$ dans la gamme $(j_1, j_2) = (5, 10)$.** A droite : **dn/d$\log_2$a pour les phases "fond turbulent" et "filaments".**

Le premier résultat de ces estimations de $H(q)$ et $n(a)$ est que les cascades infiniment divisibles représentent un modèle valable pour décrire aussi bien l'ensemble du signal de vitesse que le fond turbulent ou les filaments seuls.

Les fonctions $n^{(\phi)}(a)$ sont représentées figure V.16. Les trois courbes sont globalement assez similaires, et ne présentent pas de zone étendue où $n^{(\phi)}(a) \propto \ln a$ de façon significative. La cascade turbulente n'est pas invariante d'échelle, ce qui est cohérent avec de nombreuses observations à nombres de Reynolds modérés, même dans des écoulements homogènes isotropes. Cette affirmation est aujourd'hui couramment acceptée en turbulence. Notre analyse étend cette conclusion aux phases "fond turbulent" et "filaments".

Au lieu d'essayer d'approcher une partie restreinte (zone inertielle) de la courbe $n^{(\phi)}(a)$, plusieurs modèles ont été proposés pour décrire l'allure globale de $n^{(\phi)}(a)$ avec la contrainte qu'on retrouve un comportement logarithmique à nombre de Reynolds infini. Par exemple, la forme fonctionnelle suivante a été proposée [21, 43, 84, 100] :

$$n_{\mathrm{approx}}(a) = \mu_1 \frac{1 - a^{-\beta}}{\beta} + \mu_2 \quad , \tag{V.30}$$

où les paramètres μ_1, μ_2 et β peuvent dépendre de Re et de la géométrie de l'écoulement. Cette forme fonctionnele est telle que $\lim_{\beta \to 0}[(1 - a^{-\beta})/\beta] = \ln a$. La figure V.16 montre (à dr.) une comparaison entre nos données et ce modèle pour $\beta = 0,55$. Cette valeur est relativement cohérente avec celles évoquées dans [84], où il est de plus montré que β décroît lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Malgré la ressemblance des allures globales des trois fonctions $n^{(\phi)}(a)$, nous observons des différences manifestes dans la gamme d'échelles $[2^6, 2^{10}]$, identifiée plus haut comme la zone inertielle (fig. V.17). Les barres d'erreur de cette figure –elles résultent de la dispersion des estimations de $n(a)$ obtenues pour plusieurs tranches de signal indépendantes– montrent que ces différences sont significatives.

De tels écarts sont cohérents avec ce que nous avons observé plus haut à propos des "exposants" $\zeta(q)$. Ces exposants étaient estimés à partir de pentes mesurées dans la zone inertielle :

$$\zeta_q^{wt(\phi)} = \frac{d\ln S_q^{wt(\phi)}(a)}{d\ln a}|_{\text{zone inertielle}} = -H(q)\,\frac{dn^{(\phi)}(a)}{d\ln a}|_{\text{zone inertielle}} \quad . \tag{V.31}$$

Puisque les $H^{(\phi)}(q)$ sont identiques quelle que soit la phase considérée, la dépendance des $\zeta^{(\phi)}(q)$ résulte de la dépendance de $dn^{(\phi)}(a)/d\ln a$ avec la phase (ϕ). D'autre part, si l'on se concentre plus particulièrement sur la zone inertielle, la figure V.17(g.) suggère que la fonction $n^{(f)}(a)$ est plus proche de $\ln a$ que $n^{(b)}(a)$. C'est confirmé par la figure V.17(dr.) où $dn^{(\phi)}(a)/d\ln a$ est proche d'une constante pour les filaments, tandis qu'elle reste décroissante pour les deux autres. Il semble que l'invariance d'échelle soit mieux vérifiée dans la zone inertielle pour les filaments que pour le reste du signal.

Nous venons de montrer que les cascades log-infiniment divisibles sont une description pertinente pour les trois phases. Aucune de ces cascades n'est invariante d'échelle dans la gamme d'échelles disponible. Les fonctions $H^{(\phi)}(q)$ sont identiques pour les trois phases. Les fonctions $n^{(\phi)}(a)$ présentent par contre des différences significatives dans la zone inertielle. Il semble de plus que la phase "filaments" se rapproche plus de l'invariance d'échelle que les deux autres.

4 Intermittence et structures cohérentes : dépendance en R_λ

Dans le but de compléter à d'autres valeurs de R_λ nos résultats obtenus à $R_\lambda \simeq 300$ dans l'air, nous avons décidé d'utiliser le dispositif n^{o}2, de taille similaire au précédent, mais adapté à l'utilisation de gaz autres que l'air à température ambiante. Notre choix s'est porté sur l'hélium (He, $\nu_{He} \simeq 8\nu_{air}$), le dioxyde de carbone (CO_2, $\nu_{CO_2} \simeq \nu_{air}/2$) et l'hexafluorure de soufre (SF_6, $\nu_{SF_6} \simeq \nu_{air}/8$). A géométrie et fréquence de rotation des disques fixée, nous avons ainsi obtenu des écoulements à R_λ compris entre 50 pour l'hélium et 800 pour le SF_6 (voir tableau V.2).

4.1 Acquisition/traitement des données

Protocole d'acquisition. Nous avons procédé à l'acquisition de 16×2^{20} points dans He, et 48×2^{20} points dans l'air, le CO_2 et le SF_6 ($Fe = 78125Hz$). Il aura fallu pulvériser un certain nombre de fils chauds avant d'obtenir ces données. En effet, la cuve en laiton n'étant pas transparente (!), l'essentiel des opérations s'effectue à l'aveugle. Objectif : approcher le fil chaud ($1\times\phi$=1mm$\times 10\mu m$) à quelques mm de la paroi sans la toucher... Un genou mal placé et un disque mal accroché ne font que multiplier les accidents regrettables ! Chaque nouveau fil doit bien sûr être étalonné dans les 4 gaz, la sanction est sévère, mais inévitable...

Spectres et profils moyens. Nous avons soumis les données aux études habituelles pour vérifier leur validité. Nous ne représentons ici que les spectres de vitesse obtenus dans

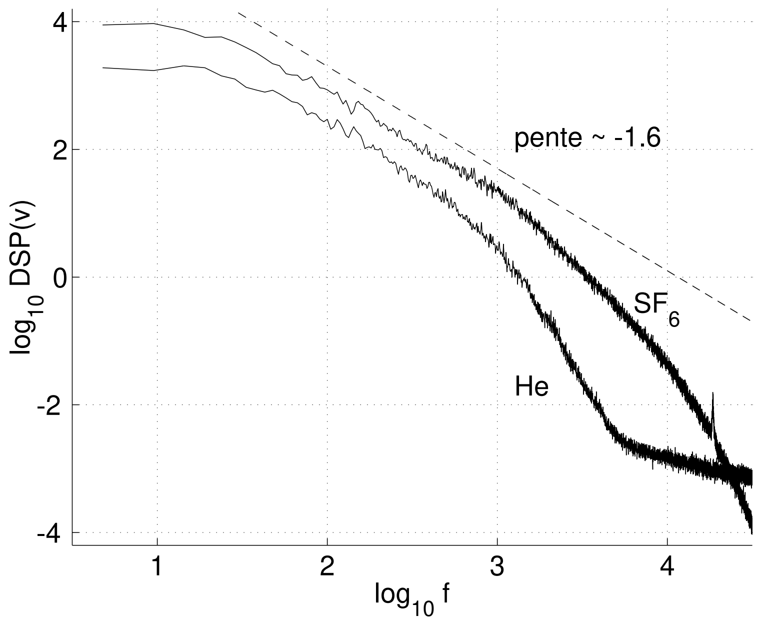

Fig. V.18: Densités spectrales de puissance de la vitesse dans He et SF_6, $F_{rot} = 30Hz$, dispositif n^{o}2.

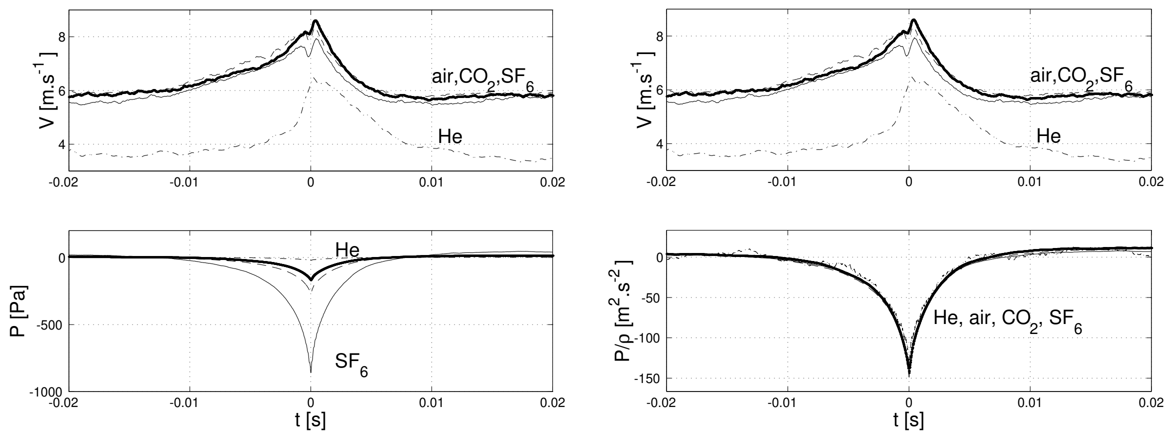

Fig. V.19: Profils moyens de vitesse (v) et de pression (P) des événements détectés, respectivement dans He, air, CO_2 et SF_6, $F_{rot} = 30Hz$, dispositif n^{o}2. A gauche, v et P : tous les profils de vitesse se superposent excepté celui de la vitesse dans l'hélium (effet de couche limite) ; la profondeur des dépressions est sensible à la nature du gaz. A droite, v et P/ρ) : les profils moyens de pression sont confondus du fait que $P \propto \rho$.

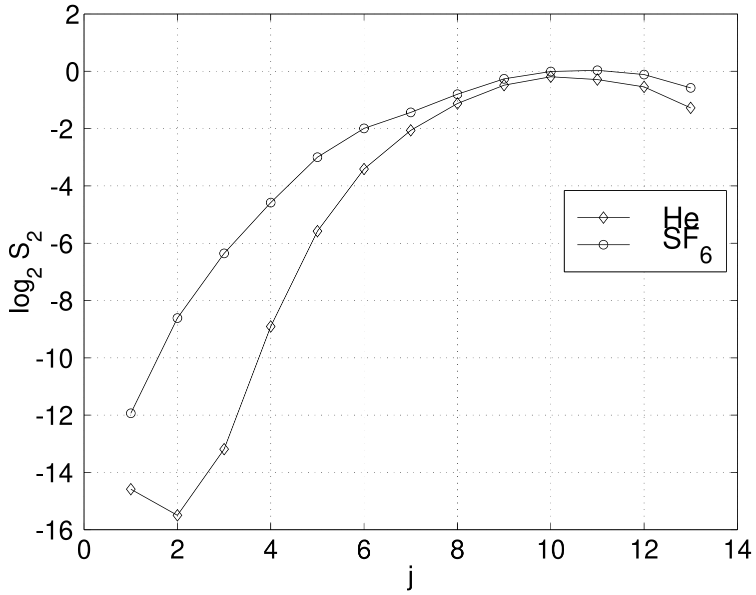

Fig. V.20: Diagrammes log-échelle des fonctions de structure d'ordre 2 ($\log_2 S_2(j)$) dans He et SF_6, $F_{rot} = 30Hz$, dispositif n^{o}2.

l'hélium et le SF_6 (fig. V.18). Nous avons utilisé une détection à seuil ($P < -4P_{rms}$) pour établir les listes de détection des filaments. Les profils moyens obtenus sont représentés fig. V.19. Les profils de vitesse sont identiques pour l'air, le CO_2 et le SF_6. Par contre, la profondeur des dépressions correspondantes étant proportionnelle à la densité ρ du gaz, elles sont de plus en plus profondes de l'hélium au SF_6. La distribution de la vitesse varie assez peu entre air, CO_2 et SF_6. Il n'est donc pas surprenant que la signature en vitesse des événements détectés soit à peu près identique dans ces trois cas ($u_{rms} \simeq 3.6m.s^{-1}$). Pour l'hélium, il est un peu différent, mais on a dans ce cas $u_{rms} \simeq 2.4m.s^{-1} < 3.6m.s^{-1}$; **nous y reviendrons**.

Estimations de S_q et C_k. Comme précédemment nous avons séparé les coefficients d'ondelette en trois groupes : ensemble, fond turbulent, filaments. De plus, nous avons voulu tenir compte d'une éventuelle dissymétrie en calculant aussi ces quantités séparément pour les coefficients négatifs et positifs. Les résultats que nous présentons par la suite sont totalement insensible à cette distinction. Nous ne parlerons donc que des résultats obtenus sans considération du signe des coefficients d'ondelette. L'ondelette utilisée est une Daubechies 5 (5 moments nuls). Nous avons estimé les fonctions de structure $S_q^{(\phi)}$ pour $q = 1, 2, \ldots, 6$, et les cumulants C_k du logarithme néperien des coefficients pour $k = 1, 2, 3$.

Gamme d'échelle utilisable. Comme on travaille à géométrie ($L = Cte$, mécanisme d'injection identique) et à dissipation moyenne ($\bar{\varepsilon} = Cte$) fixée, la principale conséquence attendue de l'augmentation de R_{lambda} est une extension de la zone inertielle vers les petites échelles. Malheureusement, il apparaît que nos données sont certainement filtrées passe-haut au-dessus de $j = 3$ ou 4. C'est justement dans cette gamme d'échelle qu'on

gaz	R_λ	λ[mm]	e_{CL}[mm]
He	100	$3,5$	$\sim 1,0$
air	300	$1,3$	$\sim 0,3$
CO_2	400	$0,9$	$\sim 0,2$
SF_6	800	$0,4$	$\sim 0,1$

Tab. V.6: Nombre de Reynolds R_λ, échelle de Taylor λ et épaisseur de la couche limite e_{CL} pour les 4 écoulements.

s'attendait à observer le déplacement de l'échelle de Taylor (voir tab. V.6, fig. V.20) :

$$\lambda_{SF_6} \simeq \lambda_{air}/3. \tag{V.32}$$

Une approximation grossière de l'échelle de coupure se déduit de la longueur de la zone de mesure du film chaud qui vaut $d_{mes} = 0.5$mm :

$$\log_2\left(\frac{d_{mes}\, Fe}{u_{rms}}\right) \simeq \log_2\left(\frac{0.5\, mm\ 78125\, Hz}{4\, m.s^{-1}}\right) \simeq 3.3 \tag{V.33}$$

Nous disposerons de façon fiable des octaves $j \geq 4$ seulement. Nous serons limité par la taille des fichiers à $j \leq 13$, ce qui laisse deux décades et demie environ. La grande échelle se trouve autour de l'octave $j = 11$, ce qui peut s'interpréter aussi bien comme le temps intégral ($\log_2(Fe/F_{rot}) \simeq 11$) ou l'échelle intégrale ($\log 2(RF_{rot}/u_{rms}) \neq\simeq 11$). Bien sûr ce défaut de résolution aux petites échelles est frustrant... Cependant, il n'oblitère en rien la portée de nos propos aux octaves $j \geq 4$ ce qui correspond à quelques fractions de λ.

Epaisseur de la couche limite. Cette question est importante car nous devons nous assurer que la mesure de l'anémomètre à fil chaud est effectuée hors couche limite, le fil se trouvant à une distance comprise entre 2 et 4 mm de la paroi du cylindre. Le tableau V.6 donne un ordre de grandeur de l'épaisseur e_{CL} de la couche limite pour les différents gaz. Nous estimons l'épaisseur de la couche limite grâce à ($R \simeq 10$ cm) :

$$e_{CL} \simeq \sqrt{\frac{\nu R}{u_{rms}}} \sim \frac{R}{R_\lambda} \tag{V.34}$$

S'il n'y a aucun problème pour l'air, le CO_2 et le SF_6, nous trouvons $e_{CL} \sim 1mm$ dans l'hélium. Or nous avons déjà remarqué que le spectre de la vitesse mesurée dans l'hélium était moins énergétique (y-compris à la grande échelle "d'injection") que celui issu du SF_6 (fig. V.18) ; de même, le profil moyen de vitesse des filaments dans l'hélium est différent (plus bas) de celui obtenu dans les autres gaz (fig. V.19). Toutes ces observations contribuent à étayer l'idée que, dans l'hélium, le fil chaud se trouvait au bord de la couche limite, et non pas complètement en dehors comme on l'aurait voulu. Dans les autres gaz (air, CO_2, SF_6), le fil se trouvait bien hors couche limite. L'étude de la fonction $H(q)$ dans le paragraphe suivant confirme cette conclusion.

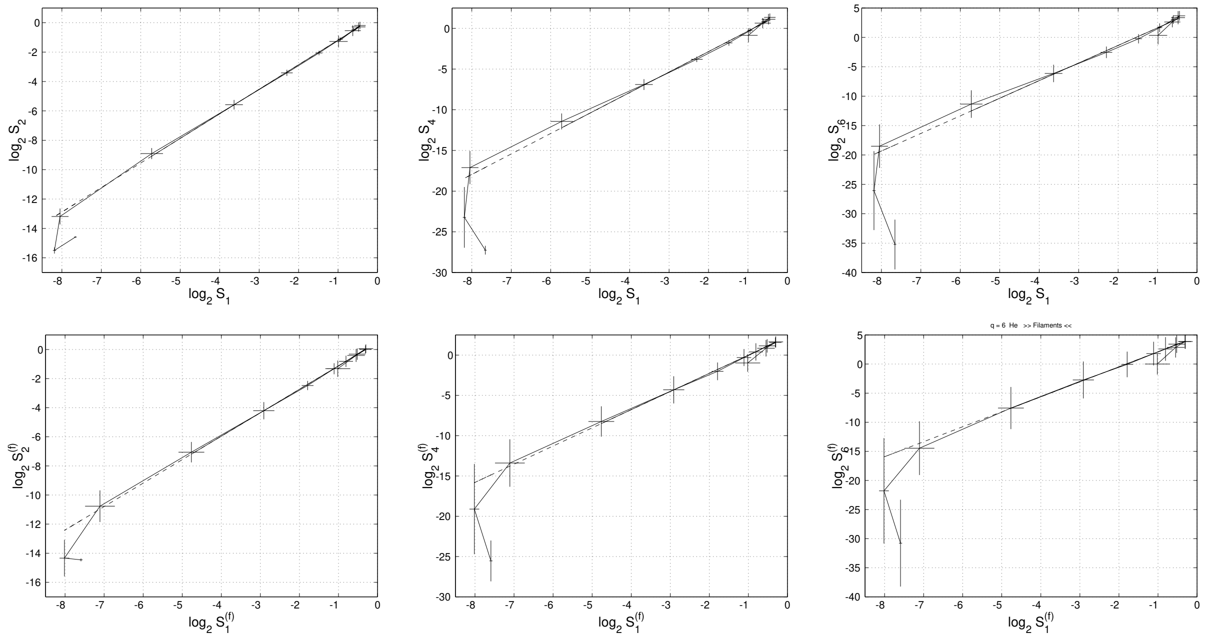

Fig. V.21: Diagrammes $\log_2 S_q$ vs $\log_2 S_1$, pour l'ensemble des coefficients (1ère ligne), et pour les filaments seuls (2ème ligne), dans l'hélium ($R_\lambda \simeq 100$). Un comportement linéaire est observé dans pratiquement toute la gamme d'échelles disponible entre $j = 3$ et $j = 11$ ($F_{rot} = 30Hz$, dispositif n^{o}2).

4.2 Cascades log-infiniment divisibles

4.2.1 Etude des moments de $\mid d_v \mid$ (fonctions de structure)

Existence de cascades log-infiniment divisibles. Les diagrammes $\log_2 S_q$ en fonction $\log_2 S_1$ font apparaître des comportements linéaires aux différents R_λ, pour les trois phases, pour $j \geq 3$. Les figures V.22 et V.21 montrent quelques-uns de ces diagrammes pour l'ensemble du signal et les filaments seuls dans l'hélium et dans le SF_6. Nous pouvons utiliser des cascades log-infiniment divisibles pour décrire les trois phases, dans les quatre écoulements (He, air, CO_2, SF_6) étudiés ($R_\lambda \simeq 100, 300, 400$ et 800). Insistons sur le fait que les facteurs Q qualifiant la linéarité de la relation (**IV**.1.2 & 2.1) sont toujours supérieurs ou égaux à 0,995.

Fonction H(q). Nous estimons d'abord les fonctions $H(q)$ des différentes cascades grâce à des régressions linéaires pondérées (Ch. **IV**). La valeur $q = 1$ est choisie comme référence de sorte qu'ici $H^{(\phi)}(1) = 1$. D'éventuels écarts ressortiront mieux que si on choisi $q = 3$ comme référence. A chaque valeur de R_λ, il apparaît qu'on ne peut pas distinguer les fonctions $H(q)$ obtenus pour l'ensemble du signal, le fond turbulent et les filaments seuls. Le générateur de la cascade est indépendant de la phase considérée (à la précision des estimations près). La figure V.24 compare les résultats obtenus dans l'air, le CO_2 et le SF_6 pour les trois phases. Les résultats sont indépendants de R_λ. On peut noter que

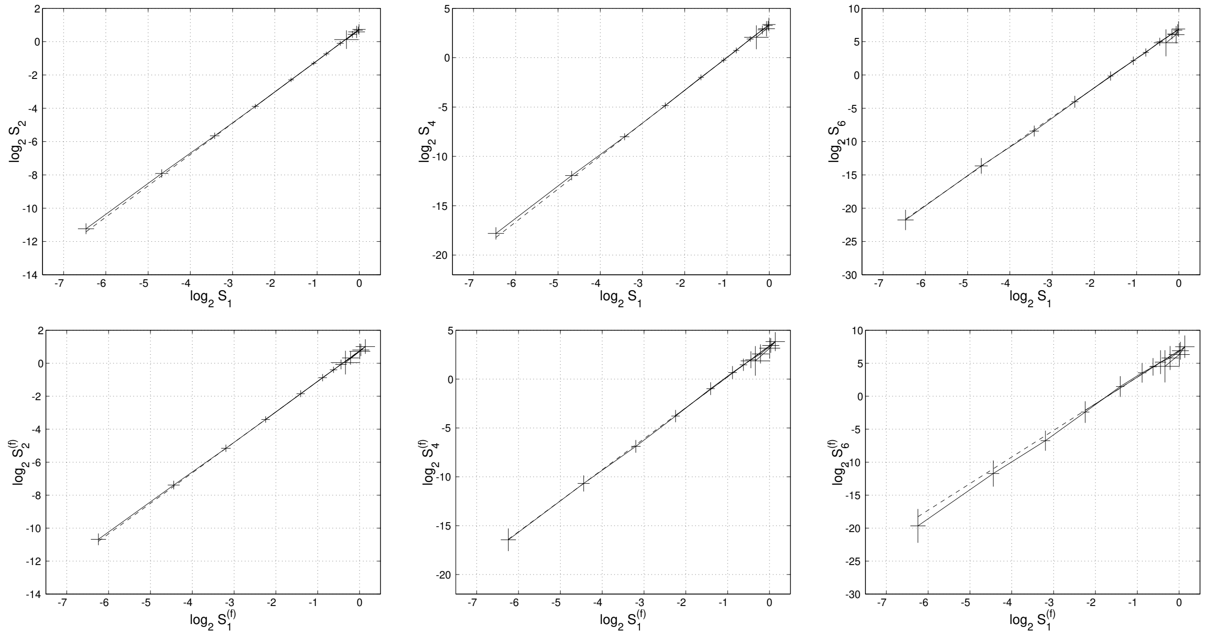

Fig. V.22: Diagrammes $\log_2 S_q$ vs $\log_2 S_1$, pour l'ensemble des coefficients (1ère ligne), et pour les filaments seuls (2ème ligne), dans le SF_6 ($R_\lambda \simeq 800$). Un comportement linéaire est observé dans pratiquement toute la gamme d'échelles disponible entre $j = 3$ et $j = 11$ ($F_{rot} = 30Hz$, dispositif n^{o}2).

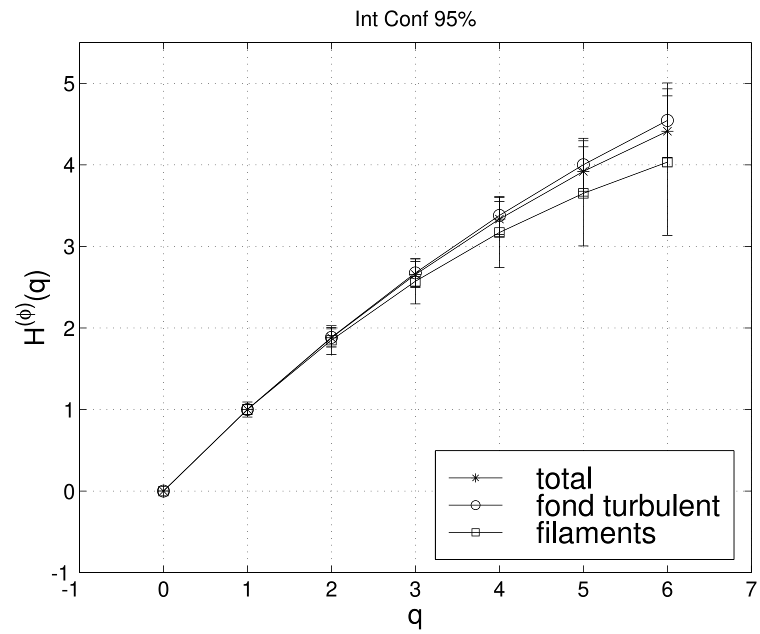

Fig. V.23: Fonctions $H^{(\phi)}(q)$ pour l'ensemble, le fond turbulent et les filaments seuls dans le SF_6 ($H^{(\phi)}(1) = 1$ par convention). Les trois estimations se confondent aux barres d'erreur près ($R_\lambda = 800$, dispositif n^{o}2). Les barres d'erreur reflètent des intervalles de confiance à 95%.

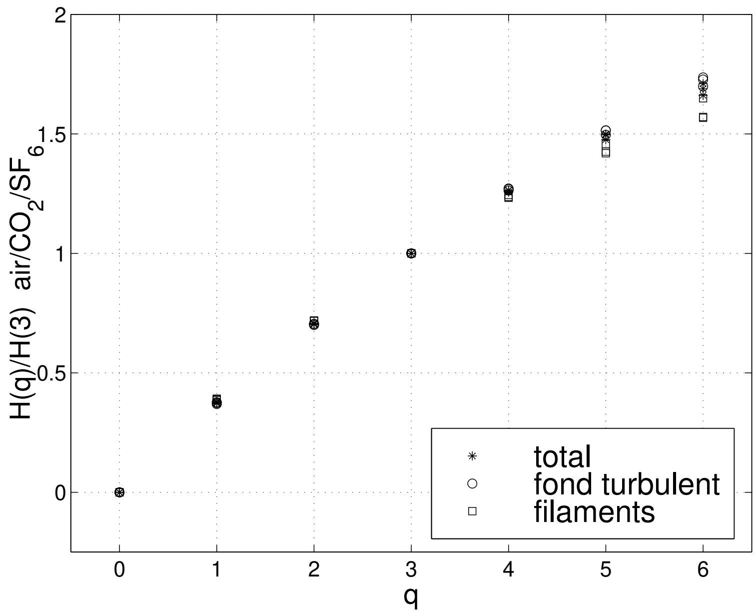

Fig. V.24: Fonctions $H^{(\phi)}(q)/H^{(\phi)}(3)$ pour l'ensemble, le fond turbulent et les filaments seuls, dans l'air, le CO_2 et le SF_6. Les résultats sont indépendants de l'écoulement considéré, donc de R_λ (dispositif n^{o}2). La convention $H^{(\phi)}(3) = 1$ atténue les faibles écarts observés fig. V.23.

les fonctions $H^{(f)}(q)$ paraissent systématiquement légèrement plus courbées que les fonctions $H^{(s)}(q)$ –fig. V.23. Les barres d'erreur sont telles qu'on ne peut pas conclure que ce soit quantitatif. La figure V.24 représente les mêmes résultats mais avec la convention $H^{(\phi)}(3) = 1$ habituellement utilisée en turbulence. Les faibles écarts entre les trois phases ne sont pas significatifs.

Par contre, $H(q)$ est nettement plus courbée pour l'hélium que pour les autres gaz. Ce comportement est certainement dû au fait que le fil se trouvait alors dans la couche limite, comme nous l'avons vu plus haut. Cette observation est cohérente avec les résultats de [164] qui montrent que la courbure de $H(q)$ est accentuée par la présence de cisaillement.

Fonction n(a). Nous laissons de côté l'hélium, pour lequel les mesures ont été faites dans la couche limite. La forme de $n(a)$ a pu être influencée. Les comparaisons entre air / CO_2 / SF_6 montrent que nous ne résolvons pas suffisamment bien les petites échelles ($j \leq 4$) pour y observer des différences. Aux échelles plus grandes ($j \geq 4$), les résultats obtenus sont identiques dans les trois cas (air, CO_2, SF_6), et sont cohérents avec les résultats obtenus dans le dispositif n^{o}1. L'allure globale des fonctions $n(a)$ est similaire pour les trois phases. Cependant, il semble que cette fonction soit plus proche de $\ln a$ pour les filaments que pour l'ensemble du signal (fig. V.26).

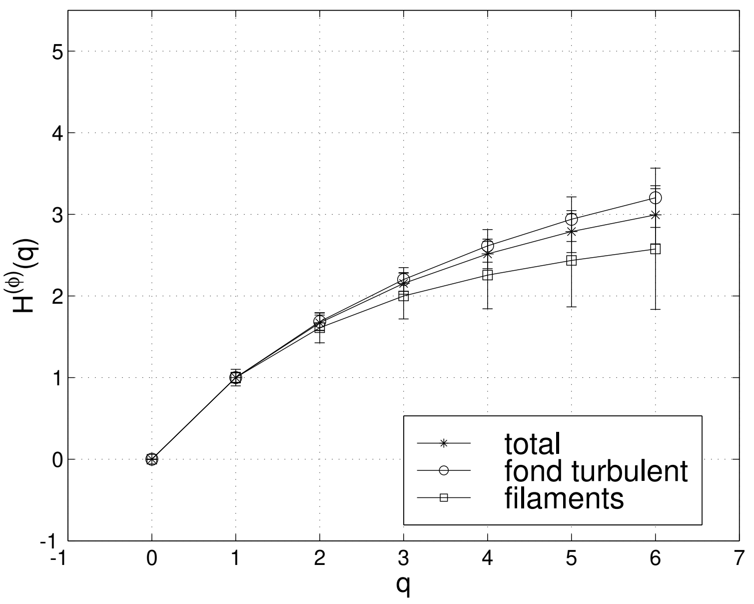

Fig. V.25: Fonctions $H^{(\phi)}(q)$ pour l'ensemble, le fond turbulent et les filaments seuls, dans l'hélium. Les trois estimations se confondent aux barres d'erreur près ($R_\lambda = 100$, dispositif n^{o}2).

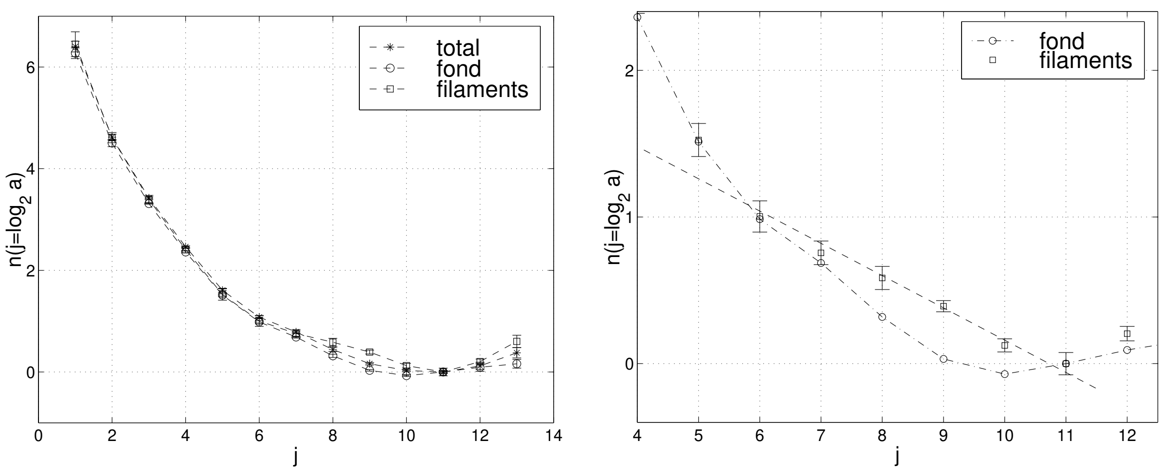

Fig. V.26: (à g.) $n^{(\phi)}(a)$ en fonction de $j = \log_2 a$ pour l'ensemble, le fond turbulent et les filaments seuls dans le SF_6 ($n^{(\phi)}(11) = 0, F_{rot} = 30Hz$, dispositif n^{o}2). (à dr.) Gamme $j = 4$ à 12 : $n^{(f)}(j)$ semble plus proche d'une droite que $n^{(b)}(j)$.

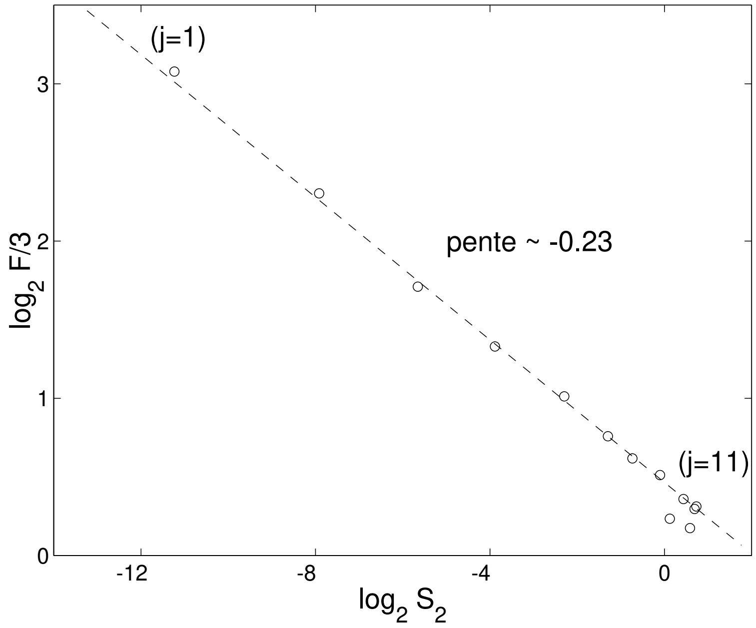

Fig. V.27: $\log_2(flatness/3)$ vs $\log_2 S_2$ pour l'ensemble des coefficients d'ondelette dans le SF_6 ($F_{rot} = 30Hz$, dispositif n^{o}2). On observe un comportement linéaire de pente $-0.23 \simeq (H(4) - 2H(2))/H(2)$.

Flatness. Enfin nous étudions le comportement de la flatness

$$F(j) = \frac{\mathbb{E} \mid d_v(j,k) \mid^4}{(\mathbb{E} \mid d_v(j,k) \mid^2)^2}. \tag{V.35}$$

La figure V.27 représente $\log_2 F$ en fonction de $\log_2 S_2$ pour l'ensemble du signal mesuré dans le SF_6. Pour une cascade log-infiniment divisible, on doit observer un comportement linéaire, dont la pente est donnée par $(H(4) - 2H(2))/H(2)$. C'est bien le cas ici, une estimation de la pente de la droite donne

$$0.23 \simeq (H(4) - 2H(2))/H(2). \tag{V.36}$$

Cette remarque est valable pour les différentes phases et les différents R_λ. Nous renvoyons à la référence [118] pour une étude détaillée du comportement de la flatness des coefficients ondelette d'un signal de vitesse turbulent.

4.2.2 Etude des cumulants de $\log \mid d_v \mid$

Nous reprenons le travail du paragraphe précédent en étudiant cette fois-ci les cumulants C_k de $\ln \mid d_v \mid$.

Existence de cascades log-infiniment divisibles. On peut tester l'existence d'une cascade infiniment divisible en utilisant les cumulants C_k du log plutôt que le log des moments

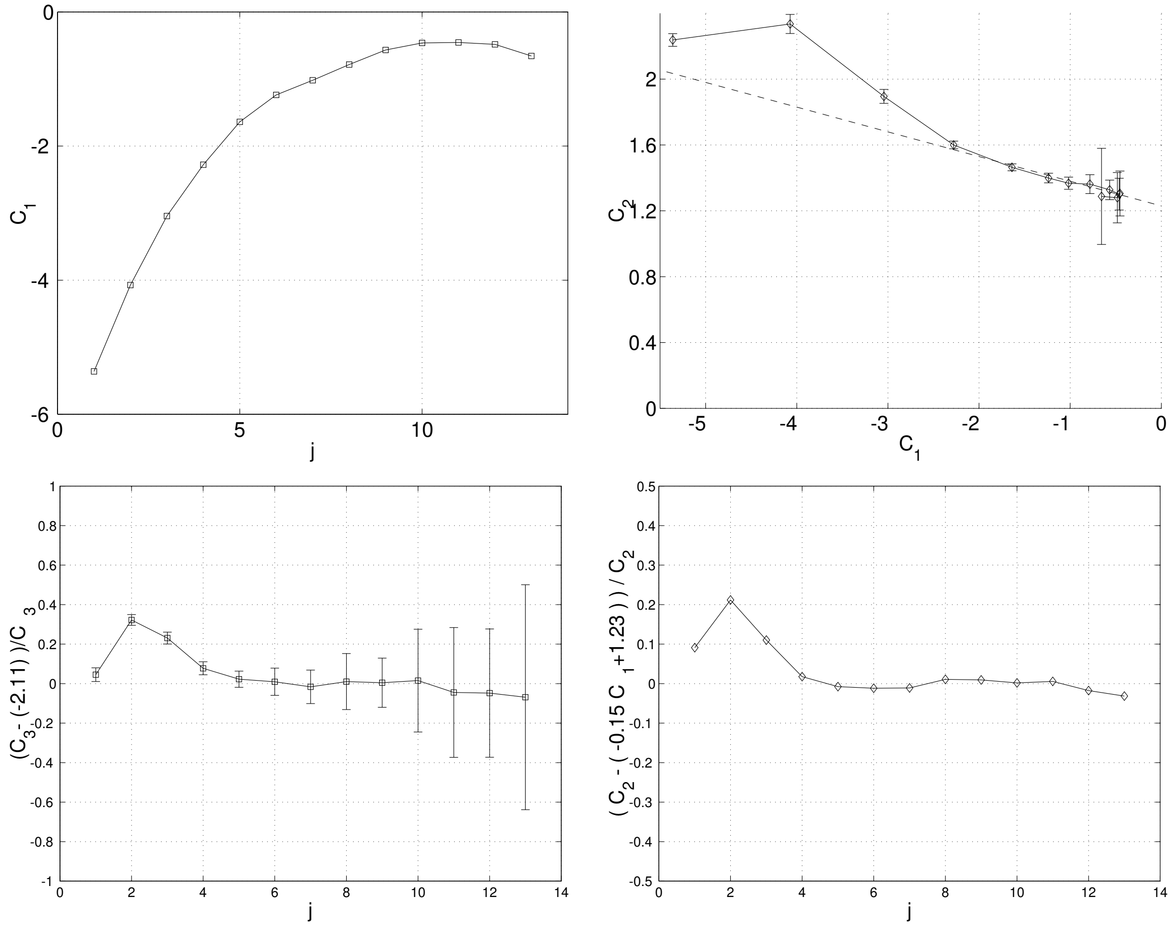

Fig. V.28: Cumulants d'ordres 1, 2 et 3 de log | d_X | pour le SF_6. (à g., en haut) $C_1(j)$. (à dr., en haut) C_2 en fonction de C_1, petites échelles à gauche ; un comportement linéaire est observé pour $j \geq 4$. (à dr. en bas) Ecart relatif de C_2 à une dépendance linéaire en C_1, inférieur à 3% pour $j \geq 4$. (à g., en bas) Ecart relatif de $C_3(j)$ à une constante, inférieur à 5% pour $j \geq 4$. Les barres d'erreur sont issues de la dispersion des estimations sur 48 fichiers de 2^{20} pts.

estimés S_q de $\mid d_v \mid$ (voir Ch. **IV**). Les problèmes d'estimation limitent notre étude à C_2 et C_3 en fonction de C_1. Les diagrammes C_k en fonctions de C_1 montrent pour toutes les phases et à tous les R_λ un comportement linéaire des C_k relativement à C_1 dans la gamme $j \geq 4$ (fig. V.28). Plus précisément, on a $C_2 \propto C_1$ et $C_3 \simeq Cte$.

Estimation des $\mathbf{C}_k^G$. Notons d'abord que $C_3 \simeq Cte$ indique que nous ne pouvons distinguer le propagateur observé d'un propagateur log-normal. Le rapport C_2^G/C_1^G caractérise alors entièrement le propagateur. Les estimations obtenues aux différents R_λ pour les trois phases ne permettent pas de faire de distinction, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus sur les fonctions de structure. Cependant, il faut rappeler que les intervalles de confiance sur les estimés des C_k sont grands, et qu'une statistique gigantesque serait nécessaire pour les réduire. La conlusion rigoureuse est qu'à la précision des estimations près, il est impossible de distinguer les valeurs des C_k^G obtenus à différents R_λ pour les phases "ensemble du signal"/"fond turbulent"/"filaments seuls". Les barres d'erreur sont énormes, proche de 50%, et révèle une réelle difficulté d'estimation. Aucune conclusion fiable n'est possible quant à H(q), excepté la constance apparente de C_3.

Fonction n(a). Estimer la fonction $n(a)$ à partir des cumulants n'est pas optimal (voir Ch. **IV**). C'est $C_1(a)$ seul qui en donne la meilleure image. Elle est tout à fait cohérente avec l'estimation obtenue à partir des fonctions de structure S_q.

5 Conclusion

Nous nous sommes attachés à l'étude de lois d'échelles en turbulence et de leurs relations avec l'existence de tourbillons filamentaires à l'aide du modèle des cascades log-infiniment divisibles[2]. Ce modèle ne pré-suppose pas l'invariance d'échelle stricte. Il autorise par nature les écarts à des lois d'échelle exactes. Les hypothèses du modèle K41 impliquent à la fois l'invariance d'échelle et la dépendance linéaire de $H(q)$ avec q. Bien qu'il soit communément admis que les fonctions de structure n'obéissent pas à des lois d'échelles strictes, la plupart des modèles proposés depuis K41 (K62, multifractal...) remettent en cause la linéarité de $H(q)$ tout en maintenant l'hypothèse d'invariance d'échelle. Lorsqu'il s'agit de se confronter aux résultats expérimentaux, il faut alors tenir compte du caractère approximatif de cette dernière hypothèse. Dans le modèle des cascades log-infiniment divisibles[3], les formes fonctionnelles des fonctions $H(q)$ et $n(a)$ ne sont pas contraintes *a priori*. C'est cette souplesse qui nous a permis d'obtenir les résultats présentés dans ce chapitre.

[2] Ce travail se situe dans le prolongement du stage de DEA où nous avions proposé une méthode à base d'ondelette pour effacer les filaments dans le signal de vitesse.

[3] Nous insistons une fois encore sur le choix des ondelettes plutôt que des accroissements. Les ondelettes généralisent efficacement les accroissements pour étudier les lois d'échelle ou les propriétés d'un signal à une échelle de temps donnée. Elles possèdent d'excellentes qualités aussi bien en termes de traitement du signal, que pour les estimations statistiques et les algorithmes de calcul (Ch. **II**& **IV**).

Les données utilisées sont issues de mesures conjointes en temps et en espace de la pression et de la vitesse dans un écoulement compris entre deux disques contra-rotatifs dans un cylindre fermé (géométrie de von Kármán). Nous attachons beaucoup d'importance au fait d'avoir mené ce travail de bout en bout, depuis l'installation du dispositif expérimental jusqu'à l'interprétation des résultats, en passant par l'acquisition et l'analyse des signaux grâce à des outils "maison". L'expérience a été extrêmement instructive, notamment quant à l'importance et la nécessité de travaux expérimentaux, jamais aussi simples qu'espéré, et toujours plus gourmands en temps et en énergie que prévu.

Un résultat important est qu'une cascade log-infiniment divisible convient pour décrire aussi bien chacune des trois phases : ensemble du signal de vitesse, fond turbulent et filaments. L'existence d'une cascade log-infiniment divisible serait une caractéristique intrinsèque à la turbulence, et aucunement due aux filaments (au moins dans ce dispositif).

Cependant les filaments influencent l'intermittence statistique. Nous ne nous contentons pas de constater que la dépendance des exposants $\zeta(q)$ des fonctions de structure avec l'ordre q est affectée. Nous avons montré que les exposants des fonctions de structure peuvent être la source de malentendus lorsqu'on étudie l'intermittence. Nous avons montré que les $\zeta^{(\phi)}(q)$ varient significativement d'une phase à l'autre : les $\zeta^{(f)}(q)$ s'écartent notablement plus que les $\zeta^{(b)}(q)$ d'un comportement linéaire. Une première interprétation est que les filaments influencent l'intermittence. La seconde est que les filaments sont *plus* intermittents que le fond, de sorte que le fond se rapprocherait d'un comportement de type K41. Or les "exposants" $\zeta(q)$ mélangent des dépendances en q et en a à travers les relations (V.31). Lorsqu'on mesure les $\zeta(q)$, une différence en fonction de q est détectée entre les phases. La source de cette différence se trouve en réalité cachée dans la dépendance en l'échelle a. Les $\zeta(q)$ sont source de confusion. Cette confusion est due à l'*a priori* $n(a) \propto \ln a$ qui est supposé rigoureux alors qu'il n'est qu'une approximation. Puisque le noyau du propagateur n'est pas sensible à la phase considérée, on ne peut pas non plus conclure que l'une des phases est plus ou moins proche de K41 que les autres.

Les filaments ne perturbent pas le pas élémentaire de la cascade qui semble avoir des caractéristiques universelles. C'est la fréquence des pas élémentaires qui est sensible à la présence des filaments. Tandis que la fonction $H(q)$ reste la même, la fonction $n(a)$ est sensible à la présence des filaments. Dans notre compréhension du rôle de ces fonctions, nous en déduisons deux conclusions.

D'une part, le noyau du propagateur G de la cascade décrit par $H(q)$ n'est pas déterminé par les filaments. En langage *ESS*, dire que les exposants relatifs ne dépendent pas des filaments est équivalent. Cette conclusion paraît en contradiction avec les conclusions d'un article récent [37] où une sensibilité de $H(q)$ à la phase est signalée. La question de l'universalité de $H(q)$, indépendamment du dispositif expérimental et du nombre de Reynolds, reste ouverte [18, 79, 100, 101, 146] et hors de notre champ d'étude.

D'autre part, la dépendance de $n^{(\phi)}(a)$ avec la phase révèle que la façon dont la cascade se développe à travers les échelles est sensible à la présence des filaments. Ils modifient le parcours de la cascade à travers les échelles sans modifier sa nature. Il semble essentiellement que la cascade se développe plus rapidement –du moins dans la zone inertielle– en présence de filaments. L'allure apparemment plus linéaire de $n^{(f)}(j)$ par rapport à $n^{(b)}(j)$

rend peut-être compte de propriétés géométriques et/ou dynamiques des structures cohérentes sélectionnées. Ce comportement particulier suggère aussi que l'évolution est plus régulière pour la phase "filaments" que pour le "fond". En effet, la vitesse de déformation $dn(a)/d\ln(a)$ des marginales à travers les échelles, c'est-à-dire la fréquence à laquelle le noyau de la cascade est appliqué, reste à peu près constante dans la zone inertielle pour les filaments. Au contraire, elle varie pour le fond turbulent désordonné. La question de la relation entre les propriétés géométriques des structures et les lois d'échelles se pose.

Toutes ces conclusions restent valables pour les différents dispositifs (He, air, CO_2, SF_6) que nous avons mis en place. Les résultats sont reproductibles et ne semblent pas très sensibles au nombre de Reynolds ($100 \leq R_\lambda \leq 800$).

Perspectives

Perspectives

En turbulence, différents auteurs peuvent aboutir à des conclusions opposées, quant au rôle de structures cohérentes. Les résultats obtenus concernant l'intermittence sont largement dépendants de la définition choisie. Nos conclusions ne portent que sur les structures de basse pression détectées dans un écoulement de von Kármán. Bien sûr, un espoir existe que ces conclusions restent valables dans d'autres écoulements (expérimentaux ou numériques) auxquels notre méthode d'analyse devra être appliquée. Il faudrait aussi considérer d'autres types de structures cohérentes, ce qui suppose l'existence d'une méthode de détection de ces structures.

Dans le cadre de notre travail, l'influence des structures cohérentes a été mise en évidence de manière très fine, notamment grâce à l'usage combiné d'une analyse multirésolution et des cascades log-infiniment divisibles. On est loin du rôle décisif souvent implicitement supposé en turbulence. Le pas élémentaire (fonction $H(q)$) de la cascade associé aux filaments est le même que celui associé au reste de l'écoulement. Par contre, la cascade se développe à la fois plus rapidement et plus régulièrement pour les filaments (fonction $n(a)$). Ces résultats semblent robustes lorsque le nombre de Reynolds R_λ varie. Nous avons apporté notre pierre à l'édifice en n'éclairant qu'une petite facette du lien entre structure (géométrique, dynamique) et statistique. La tâche à accomplir avant de pouvoir répondre complètement à cette interrogation reste imposante et revêt des aspects très divers.

La question de l'importance physique du phénomène d'intermittence rejoint la question précédente : quels sont les mécanismes physiques qui se cachent sous cette observation essentiellement statistique ? Nous apportons quelques éléments de réponse à cette vieille inconnue, notamment en proposant une interprétation du modèle log-Poisson composé. Nous avons aussi éclairci les liens entre les cascades log-infiniment divisibles et les modèles de type équation de Langevin ou équation de Fokker-Planck. De nombreuses pistes restent à explorer pour les théoriciens comme pour les expérimentateurs. Il est un peu démotivant de constater que, à notre connaissance, on n'a encore jamais tiré d'application pratique directe de ce que l'on sait du phénomène d'intermittence. L'une des clés réside sans doute dans la mise au point de nouvelle techniques de mesure dans les écoulements. L'anémomètre à fil chaud n'est pas la panacée, loin s'en faut. D'autres méthodes (anémométrie laser, Particle Image Velocimetry, diffusion ultrasonore...) sont disponibles et permettent de "regarder" l'écoulement sous un autre éclairage, mais elles ont elles aussi leurs défauts. Quelques espoirs se dessinent aussi du côté des toutes nouvelles mesures lagrangiennes [93, 115, 116] : au lieu de mesurer la vitesse du fluide en un point, on mesure la vitesse d'une particule de fluide suivie dans le temps et dans l'espace. L'étude expérimentale de l'intermittence en turbulence se heurte ainsi à d'importants obstacles techniques.

Reste que les questions de statistique posées par l'étude de ce phénomène sont passionnantes. De plus, leur portée ne se limite pas à la turbulence et laisse espérer des résultats dans des domaines aussi variés que le télétrafic informatique et les télécommunications, la finance, l'écologie, l'hydrologie... L'obtention d'une méthode de synthèse d'un signal respectant une cascade log-infiniment divisible prédéfinie est l'une des perspectives principales de ce travail de thèse. Notre réflexion sur les liens entre cascades multiplicatives et cascades log-infiniment divisibles s'inscrit dans cette démarche. Il existe quelques résultats partiels [24, 150] qui demandent à être largement étendus pour une plus grande généralité et une capacité de modélisation qui hérite de la richesse et la souplesse des cascades log-infiniment divisibles. Notre collaboration avec Rudolf Riedi engagée récemment s'oriente sur cette voie de façon enthousiasmante.

La recherche d'une méthode de synthèse générale, nous amène à préciser progressivement notre représentation des cascades log-infiniment divisibles. Disposer d'un tel outil sera aussi une étape décisive quant aux problèmes d'estimation. Les résultats actuels reposent sur l'exploitation des "bonnes" propriétés des analyses multirésolution, mais aussi sur quelques approximations qui nous ont permis de proposer des intervalles de confiance et une correction du biais pour des estimateurs d'exposants de lois d'échelle sur les coefficients d'ondelette. Ces estimations sont d'autant plus difficiles qu'on s'écarte de l'autosimilarité ($H(q) \neq qH$ et/ou $n(a) \neq \ln a$). Malgré nos progrès, des améliorations sont encore nécessaires. Dès que nous pourrons synthétiser des signaux dont les propriétés d'échelle sont prescrites, il deviendra tout à fait envisageable de caractériser très précisément les différents estimateurs indispensables à la description des cascades log-infiniment divisibles, au moins numériquement.

Le travail sur les processus α-stables a montré que le comportement de nos estimateurs était parfois subtil. Nous avons pu dans ce cas démonté le mécanisme statistique expliquant ce comportement : $\mathbb{E} \log S_q$ peut être une fonction linéaire de $\log a$ alors même que $\mathbb{E} S_q$ n'est pas définie ($q < -1$ ou $q > \alpha$) et ne peut donc pas a fortiori se comporter en loi de puissance de l'échelle. Cette réflexion s'est avérée à la fois formatrice et très instructive, aussi bien sur le plan mathématique que méthodologique.

Enfin, nous voulons insister sur les perspectives que dessinent les cascades log-infiniment divisibles comme généralisation de la notion d'invariance d'échelle. Au-delà de l'autosimilarité, du formalisme multifractal et du multiscaling, les cascades log-infiniment divisibles n'en conservent que l'ingrédient minimal : la séparation des variables $H(q)n(a)$. La souplesse d'un tel formalisme laisse présager de sa capacité de modélisation de données expérimentales, en évitant d'injecter trop d'a priori dans la méthode d'analyse. L'analyse multirésolution, en fournissant une représentation temps-échelle, joue ici encore un rôle de premier plan. Un grand espace de jeu s'ouvre à nous, en statistique, en traitement du signal, comme en physique.

Annexes

A. Remarkable features of multiplier distributions in turbulence

P. Chainais, E. Lévêque, P. Abry et Ch. Baudet

Dans *Advances in Turbulence VIII*, Kluwer. ETC8, Barcelone, juin 2000.

B. Des lois d'échelle autour des maxima de dissipation en turbulence ?

1 Motivations

L'intermittence statistique est souvent heuristiquement associée à la présence (rare) de grands événements de dissipation. Cette idée a été suggérée pour la première fois par Kolmogorov en 1962 [92]. Le modèle log-normal explique l'intermittence statistique en tenant compte des fluctuations de la dissipation ε. Depuis beaucoup de modèles de cascades ont été proposés. Dans le modèle de She & Lévêque [153], les valeurs extrêmes de ε jouent un rôle central et sont reliées à des tourbillons filamentaires. Le lien exact entre fort gradients de vitesse et structures cohérentes demeure une question ouverte [38, 37, 46]. Une prédiction importante du modèle de She & Lévêque est la loi d'échelle

$$\varepsilon_r^{(\infty)} \sim r^{-\frac{2}{3}} \tag{B.1}$$

où $\varepsilon_r^{(\infty)}$ désigne la dissipation moyennée localement, définie par (I.18), centrée sur un maximum de $\varepsilon(x)$. Cette prédiction n'a jamais été testée directement. Nous nous intéressons maintenant aux valeurs extrêmes de $\varepsilon(x)$ dans des écoulements turbulents et nous étudions propriétés d'échelle de ε_r centrée sur ces événements. Nous présentons aussi des comparaisons avec les résultats issus d'un bruit gaussien. Nos observations posent des questions essentielles quant à la signification physique de l'observation de lois d'échelle autour d'événements extrêmes.

2 Démarche expérimentale

Nous utilisons des données issues de deux écoulements : le sillage d'un cylindre ($R_\lambda = 180$) et un jet turbulent ($R_\lambda = 500$). Dans les deux cas la turbulence est bien développée, et nous supposerons que les fluctuations des quantités physiques sont statistiquement homogènes et isotropes.

Les signaux de vitesse sont obtenus grace à un anémomètre à fil chaud. Nous travaillons avec la version 1D de la dissipation

$$\varepsilon(x) = 15\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \simeq \frac{15\nu}{V^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2. \tag{B.2}$$

en utilisant l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor pour estimer la dérivée spatiale de la vitesse (V désigne la vitesse moyenne).

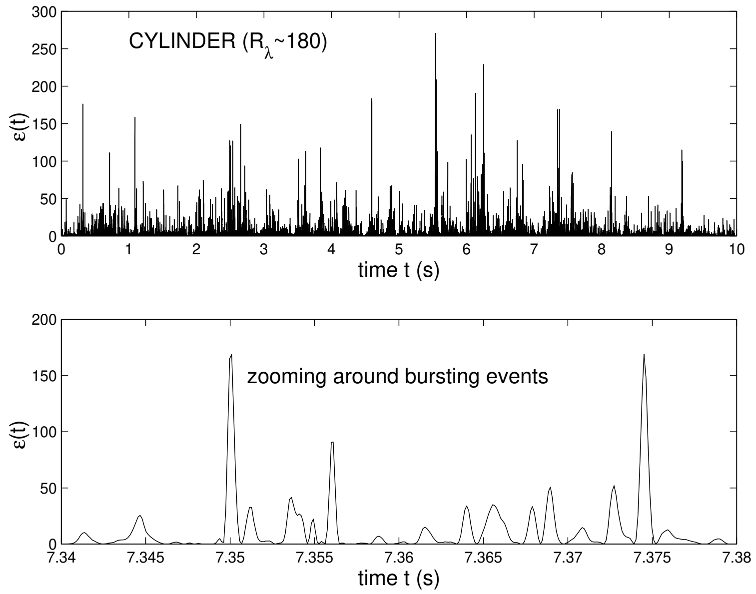

Fig. B.1: Taux de sissipation ε. On observe une succession de bouffées de dissipation. Le taux de dissipation moyen $\bar{\varepsilon} \simeq 3.5$ m^2/s^3. La durée de corrélation de la vitesse (échelle de temps intégrale) est $T \simeq 0.02$ s.

Notre démarche consiste à détecter les fluctuations extrémales de ε et à étudier le comportement de ε_r autour de ces extrema. En pratique, le signal de vitesse a été découpé en segments de longueur Δ (beaucoup) plus grande que l'échelle intégrale L. On repère alors le maximum de dissipation dans chaque tranche. On peut ainsi étudier les événements individuellement ou s'intéresser à l'événement moyen (obtenu par moyenne synchrone). Le maximum détecté est bien sûr d'autant plus grand que la longueur Δ du segment est grande.

3 Dissipation autour d'un extremum

Nous nous intéressons maintenant au comportement de ε_r autour d'un maximum de ε. Une loi de puissance semble convenir dans une gamme d'échelles r relativement grande (plus d'une décade). Une telle observation sur un unique événement isolé, sans aucune moyenne ou lissage préalable, est étonnante. Pour chaque maximum, une loi de puissance dans une gamme d'échelle variable est observée avec un exposant compris entre -0.5 et -0.9, très souvent proche de $-2/3$. La valeur -1 correspondrait à un pic très intense isolé au milieu de fluctuations négligeables, toute la dissipation étant concentrée en un point.

Les lois de puissance d'exposant proche de $-2/3$ sont observées localement. Lorsque deux maxima locaux séparés par une distance d_0 sont suffisamment proches l'un de l'autre, un saut dans la valeur de ε_r est observé pour $r = 2d_0$. Nous pourrions à ce stade être tentés d'imaginer le champ de dissipation comme un gaz, une superposition d'objets ayant des propriétés d'échelle similaires. Nos observations semblent tout à fait cohérentes avec le

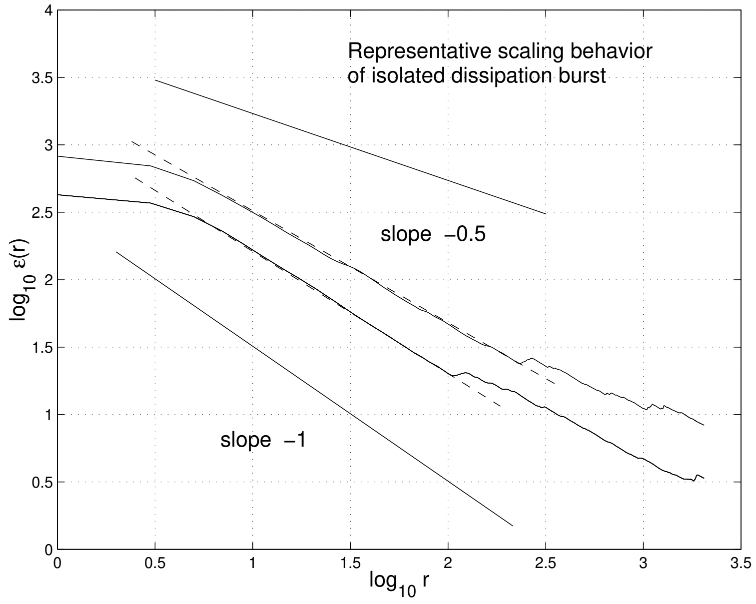

Fig. B.2: Une loi de puissance est observée sur plus d'une décade autour d'un maximum de dissipation. Les exposants estimés sont proches de $-2/3$. Sillage d'un cylindre, $\Delta \sim 1024L$.

modèle de She & Lévêque.

En procédant à une moyenne sur tous les maxima détectés (un par segment), on obtient un comportement très proche d'une loi de puissance dont l'exposant est de l'ordre de -0.8. La figure B.3 montre les résultats obtenus à partir de segments de longueur $\Delta = 1024L$. L'effet de lissage dû à la moyenne rend encore plus convaincante l'hypothèse d'un comportement en loi de puissance.

4 Comparaison avec des signaux synthétiques

Afin de nous assurer que nos observations ont une origine purement physique, nous effectuons exactement la même analyse sur un bruit blanc gaussien au lieu du champ de vitesse. Les résultats sont représentées sur la figure B.4. Comme pour le signal de vitesse turbulent, une loi de puissance d'exposant proche de $-2/3$ est mise en évidence sur plus d'une décade en échelle... même sur un seul événement extrémal !

Cependant, on remarque que le comportement en loi de puissance semble se prolonger pratiquement jusqu'en $r = 0$, ce qui n'était pas le cas pour le signal de vitesse turbulent. La forme plus aplatie de la courbe $\log_{10} \varepsilon_r$ pour les faibles valeurs de r s'explique simplement par la présence de corrélations dans le signal de vitesse et par conséquent dans le signal de dissipation : autour d'un maximum, la dissipation prend encore des valeurs élevées sur une distance de l'ordre de la longueur de corrélation L_ε de la dissipation. Nous pouvons vérifier ce raisonnement de deux façons. D'une part nous étudions le signal de dissipation construit à partir d'un bruit gaussien d'autocorrélation exponentielle, ayant une longueur

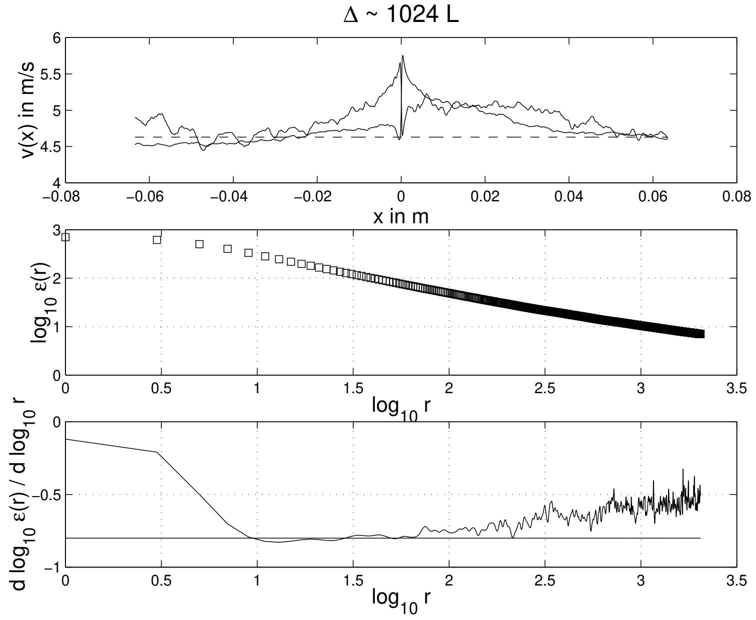

Fig. B.3: Sillage derrière un cylindre, $R_\lambda \simeq 180$. Nous observons un comportement en loi de puissance sur pratiquement une décade ; l'exposant est voisin de 0.8.

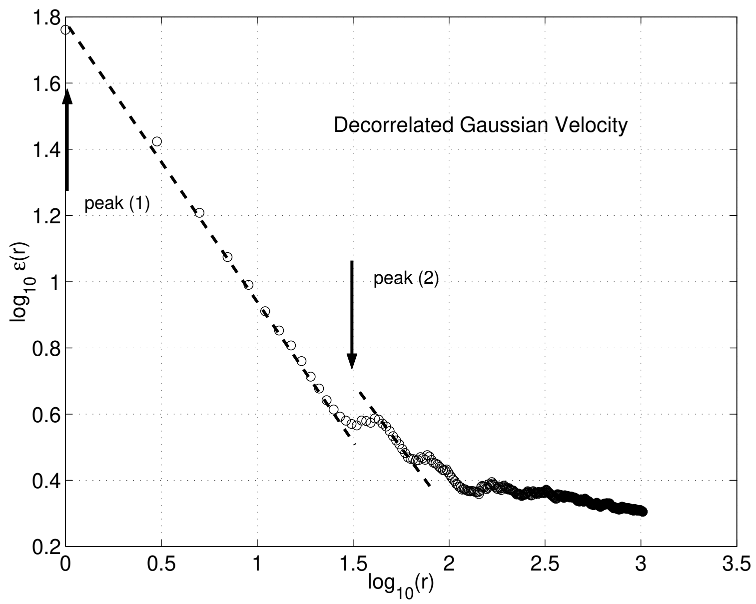

Fig. B.4: Une loi d'échelle apparaît dès qu'un maximum de dissipation entre dans l'intervalle sur lequel on estime ε_r. Les exposants sont compris entre -0.5 et -0.9.

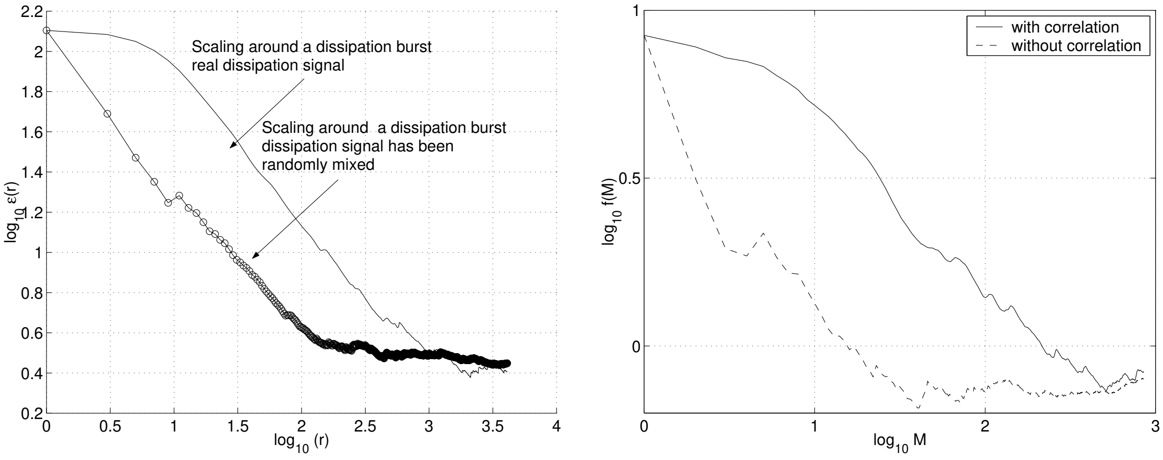

Fig. B.5: Les résultats sont très similaires dans les deux cas. Une loi de puissance pourrait très bien être observée dans un cas comme dans l'autre.

de corrélation proche de L_ε. La figure B.5 montre bien la succession de deux comportement. Pour les petites valeurs de r, on observe une forme arrondie de $\log_{10} \varepsilon_r$, puis on retrouve le comportement observé sur un bruit blanc gaussien pour les plus grandes valeurs de r. D'autre part, on peut étudier le comportement de $\tilde{\varepsilon}_r$ calculé à partir des $\varepsilon(\tilde{x}_i)$ où les $\tilde{x}_i$ sont obtenus par permutation aléatoire des x_i à l'intérieur d'un segment. Cette fois la forme arrondie de la courbe $\log_{10} \varepsilon_r$ en fonction de $\log_{10} r$ disparaît.

5 Explication à partir d'un bruit blanc gaussien

Nous allons montrer dans ce cas précis (vitesse=bruit blanc gaussien) comment un simple effet statistique explique ce résultat apparemment extraordinaire (et initialement enthousiasmant, avouons-le !).

Nous considérons un bruit blanc gaussien (discret) u_i. Les u_i sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (*i.i.d.*). Nous définissons alors $y_i = u_i^2$ de densité de probabilité $p(y)$ et de fonction de distribution cumulée $P(y)$. Pour un segment de $N = 2M + 1$ points, soit

$$y_0 = \max(y_0, y_{-M}, \ldots, y_M) \tag{B.3}$$

Nous voulons décrire :

$$f(M) = \frac{1}{2M+1}\left(y_0 + \sum_{i=-M, M\neq 0}^{M} y_i\right) \tag{B.4}$$

L'espérance de $f(M)$ est donnée par

$$E[f(M)|\mathcal{C} \equiv y_0 \geq y_{-M}, \ldots, \;\; y_M] = \frac{1}{2M+1}\left(\sum_{i=-M, M\neq 0}^{M} E[y_i|\mathcal{C}] + E[y_0|\mathcal{C}]\right). \tag{B.5}$$

Les y_i sont *i.i.d.* de sorte que

$$\begin{cases} E[f(M)] = \dfrac{2Mb+a}{2M+1} \\ a = E[y_0|\mathcal{C}], \\ b = E[y_i|\mathcal{C}]. \end{cases} \tag{B.6}$$

a s'évalue simplement grâce à

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(2Mp(y)P^{2M-1}(y)\right) dy \tag{B.7}$$

Nous obtenons alors pour b :

$$b = \frac{2M}{2M-1}\left(E[y] - \int_{-\infty}^{+\infty} yp(y)P^{2M-1}(y)dy\right) \rightarrow E[y] \quad \text{as} \quad M \rightarrow \infty. \tag{B.8}$$

Ce résultat est cohérent avec l'intuition que l'on doit retrouver $E[f(M)] \rightarrow \mathbb{E}[\,y\,]$ et donc $b \simeq \mathbb{E}[\,y\,]$ lorsque $M \rightarrow \infty$.

Notons que pour $N = 2M+1$ suffisamment grand, on a $a/b \gg 1$. La procédure conditonnée sur les maxima mène alors à une quasi loi de puissance. En effet, la pente dans un graphe $\ln f(N)$ en fonction de $\ln N$ (N est ici l'analogue de r) est donnée par

$$\frac{d\ln f}{d\ln N} \simeq -\frac{N-1}{N} \quad \text{tant que} \quad \frac{Nb}{a} \ll 1. \tag{B.9}$$

Les premières valeurs sont 0 (N=1), $-2/3$ (N=3), $-3/4$ (N=5)... Toutes ces pentes ne sont pas très différentes et proches de $-2/3$! De plus, la graphe de $\ln f(N)$ en fonction de $\ln N$ met en évidence un point d'inflexion, une zone très similaire à une droite. Pour $a/b \sim 50$ par exemple, la pente au point d'inflexion est ~ -0.75 environ, ce qui est proche de $-2/3 \simeq -0.67$. On pourrait facilement penser qu'il s'agit d'une loi de puissance d'exposant $-2/3$ alors qu'il n'ya pas de loi de puissance. L'écart à la loi de puissance est faible, mais nous le connaissons analytiquement ici. Remarquons que la nature exacte de $p(y)$ a peu d'importance dans cette démonstration. Il n'est pas non plus nécessaire que les y_i soient positifs.

Il est plus difficile de traiter le cas où les y_i sont corrélés. Nous avons vu que le plateau observé pour les petites valeurs de N dans les données expérimentales était dû à la présence de corrélations dans le signal. Nous pouvons aussi nous attendre à ce que les corrélations tendent à "tendre" la courbe $\ln f(N)$ en fonction de $\ln N$, accentuant l'impression d'une véritable loi d'échelle d'origine physique. Il semble que ces observations soient en réalité essentiellement liées au comportement générique des événements extrémaux.

6 Discussion

A première vue, le signal de dissipation moyenné ε_r autour d'un maximum de ε semble respecter une loi de puissance, d'exposant proche de $-2/3$, qui plus est prédit par le modèle She & Lévêque. Ce comportement s'avère essentiellement trivial, au sens où il est facilement reproduit à partir d'un simple bruit blanc gaussien.

Cette étude suggère aussi qu'il faut rester extrêmement prudent quant à l'observation de lois de puissance en turbulence. Nous avons vu que des lois de puissance pouvaient être observées avec les caractéristiques d'une prédiction théorique d'origine physique alors que leur origine est en réalité essentiellement un pur effet statistique. Il s'agit d'être particulièrement vigilant, notamment lorsqu'on s'intéresse aux extrema d'un processus. Cela ne signifie tout de même certainement pas que les lois d'échelle observées en turbulence ne seraient que le résultat de la violence des fluctuations de la dissipation ε.

C. Etalonnage d'un fil chaud pour différents gaz

Pour les étalonnages dans l'air, on utilise habituellement une soufflerie étalonnée alimentée par l'air ambiant grâce à un ventilateur. Nous avons eu besoin d'obtenir pour un même fil 4 étalonnages : un dans l'air, et trois dans d'autres gaz, respectivement l'hélium (He), le dioxyde de carbone (CO_2), et l'hexafluorure de soufre (SF_6). Dans les gaz autres que l'air, il a fallu mettre en place un dispositif et une méthode adaptés.

1 Etalonnage dans l'air

Nous rappelons brièvement le dispositif utilisé au laboratoire pour étalonner les fils chauds dans l'air. Il s'agit d'une petite soufflerie dont on obtient un calibrage "vitesse en sortie" v en fonction de la "tension d'alimentation" U du ventilateur à l'aide d'une sonde de Pitot.

Le fil chaud est installé à quelques millimètres de la buse, perpendiculairement au flux d'air. On mesure la tension e délivrée par l'anémomètre pour une série de valeurs de la tension U d'alimentation du ventilateur. On en déduit la fonction $e(v)$. Dans l'esprit de la loi de King, on estime alors les coefficients $A(T)$ et $B(T)$ tels que :

$$e^2 = A(T) + B(T)v^\gamma \tag{C.1}$$

En pratique, nous utilisons $\gamma = 0.4$ qui semble en général fournir une approximation légèrement meilleure que $\gamma = 0.5$ (loi de King stricte). Pour un fil fonctionnant à 250^oC, on a pour les petites variations de températures :

$$\begin{cases} A(T) = A_0 \dfrac{250 - T}{250 - T_{ref}} \\ B(T) = B_0 \dfrac{250 - T}{250 - T_{ref}} \end{cases} \tag{C.2}$$

où T_{ref} est la température du gaz lors de l'échantillonnage.

Par la suite, nous utilisons aussi la relation réciproque :

$$v^\gamma = a + b(T)e^2 \tag{C.3}$$

où cette fois on a :

$$\begin{cases} b(T) = b_0 \dfrac{250 - T_{ref}}{250 - T} \\ a \simeq Cte \end{cases} \tag{C.4}$$

2 Etalonnages pour des gaz autres que l'air

Deux méthodes sont susceptibles de fournir un étalonnage du fil chaud dans différents gaz. La première méthode est statistique. Elle repose sur l'hypothèse que la distribution des valeurs prises par le signal de vitesse est la même pour les quatre gaz à fréquence de rotation fixée dans la "machine à laver". A partir d'un étalonnage dans l'air, on pourra déduire l'étalonnage dans un autre gaz en identifiant les histogrammes de la vitesse. La deuxième méthode est expérimentale, et consiste à mettre en œuvre pour les gaz différents de l'air une méthode similaire à celle décrite au 1. C'est cette deuxième méthode que nous avons utilisé en pratique.

2.1 Méthode des histogrammes cumulés

L'hypothèse fondamentale ici est que l'histogramme du signal de vitesse est à peu près le même pour les 4 gaz lorsque la géométrie et le forçage sont identiques. Si on dispose d'un étalonnage dans l'air, les étalonnages pour les autres gaz peuvent s'en déduire de la façon suivante.

On effectue d'abord une acquisition du signal de vitesse de même longueur pour chacun des quatre gaz (à fréquence d'échantillonnage fixée bien sûr). Ensuite, pour chaque série, on classe les valeurs prises par le signal de tension de l'anémomètre dans l'ordre croissant. On repère dans cette série croissante un certain nombre de valeurs et leurs positions. L'étalonnage expérimental pour l'air fournit les vitesses correspondant à ces positions. On dispose alors pour chaque gaz d'une correspondance entre les positions des valeurs de la tension mesurée par l'anémomètre et la vitesse associée. Cette correspondance donne accès à la réponse vitesse=f(tension) du fil chaud pour chacun des gaz.

Nous avons appelé cette méthode "méthode des histogrammes cumulés", puisque nous ne faisons rien d'autre qu'établir une identification entre les histogrammes cumulés obtenus pour les différents gaz.

2.2 Méthode expérimentale

2.2.1 Dispositif

Nous avons adapté à la buse tronc-cônique de sortie de la soufflerie existant pour l'air une partie cylindrique précédée d'une buse d'entrée identique à celle de sortie. Deux grilles, l'une grossière –en entrée de la partie cylindrique– l'autre plus fine –en entrée de la buse de sortie– assurent une homogénéisation de l'écoulement avant le passage dans la buse de sortie. Nous espérons ainsi obtenir un écoulement suffisamment laminaire et régulier en sortie lorsque le dispositif est alimenté directement depuis une bouteille de gaz sous pression. Le fil chaud et une sonde de Pitot placée en aval sont installés à quelques millimètres de la sortie de buse.

En sortie de bouteille, on fait circuler le gaz dans un tuyau en cuivre de 15 m de long

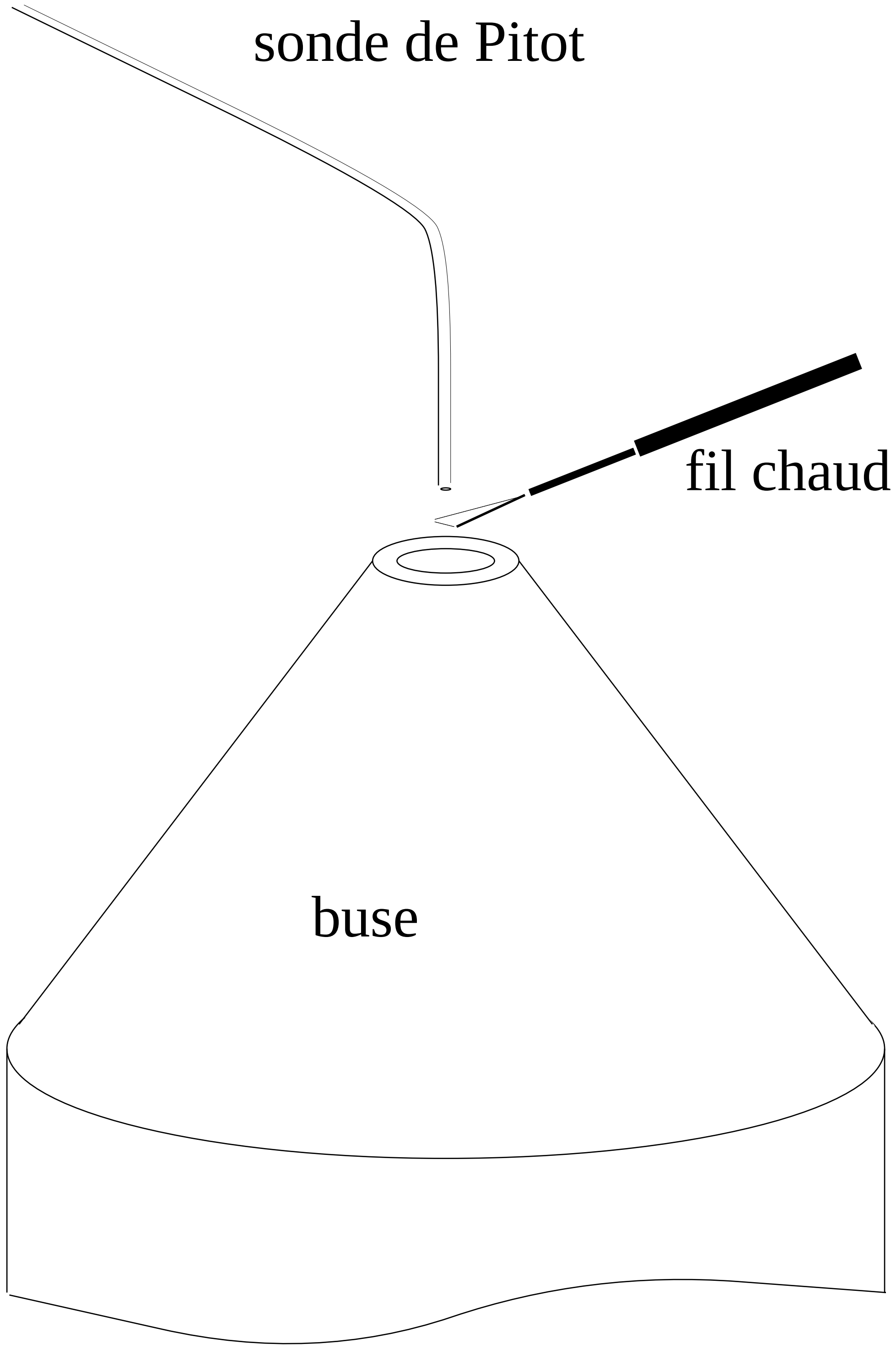

Fig. C.1: Installation du fil chaud et de la sonde de Pitot en sortie de la buse d'étalonnage. La buse est orientée vers le bas pour les gaz plus lourds que l'air (CO_2, SF_6), et vers le haut pour les gaz plus légers (He).

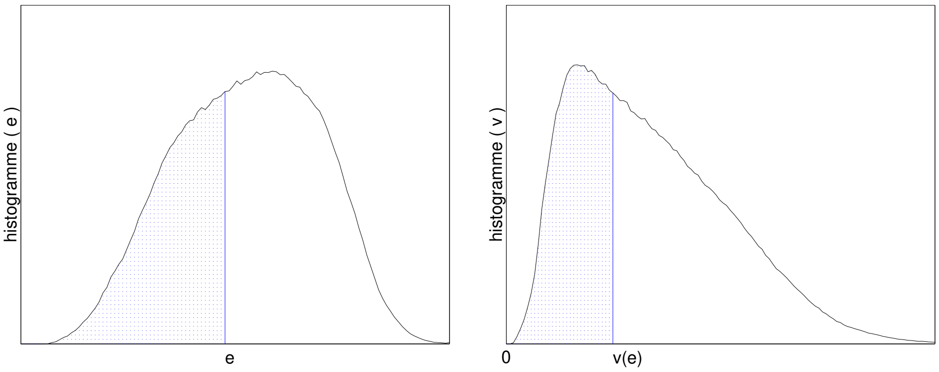

Fig. C.2: Méthode statistique d'étalonnage à partir de l'histogramme de la tension délivrée par l'anémomètre (pour un gaz quelconque) et de l'histogramme de la vitesse pour l'air.

	grandeur	He	air	CO_2	SF_6	unité
masse molaire	$\mathcal{M}$	4	29	44	146	$g.mol^{-1}$
masse volumique	ρ	$0,164$	$1,18$	$1,79$	$5,9$	$kg.m^{-3}$
conductivité thermique	λ_{th}	$0,191$	$0,0262$	$0,0166$	$0,013$	$W.m^{-2}.K^{-1}$
capacité thermique	c_p	5200	1006	833	661	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
viscosité cinématique	ν	12	$1,57$	$0,834$	$0,19$	$.10^{-5}m^2.s^{-1}$
viscosité dynamique	μ	$1,99$	$1,85$	$1,49$	$1,15$	$.10^{-5}kg.m^{-1}.s^{-1}$
diffusivité thermique	κ	$22,4$	$2,22$	$1,12$	$0,33$	$.10^{-5}m^2.s^{-1}$
nombre de Prandtl	Pr	$0,54$	$0,71$	$0,75$	$0,6$	$--$

Tab. C.1: Grandeurs caractéristiques des 4 gaz : hélium, air, dioxyde de carbone et hexafluorure de soufre à température ambiante (20°C) [25, 97].

environ afin de l'amener à température ambiante. Les séquences de mesures ne durent que quelques minutes pour s'affranchir du refroidissement dû à la détente du gaz (imperceptible pour l'hélium mais violent pour l'hexafluorure de soufre). Ainsi, la température du gaz reste très proche de la température ambiante durant l'étalonnage.

La cause principale d'incertitude de cette méthode est alors la pertubation de la sonde de Pitot par le sillage du fil chaud. Nous avons pu vérifier que cette perturbation reste faible, même si elle peut atteindre 5 à 10%. Nous devrons nous en contenter.

2.2.2 Résultats et observations

Nous regroupons dans le tableau C.2 les coefficients a et b de la relation (C.3) obtenus pour 3 fils différents, pour chacun des 4 gaz, pour $\gamma = 0,4$. Tous ces étalonnages ont eu lieu à des températures comparables ; les valeurs reportées dans le tableau sont corrigées pour correspondre aux valeurs à 20^oC. Notons que ces coefficients varient d'un fil à l'autre

	He		air		CO_2		SF_6	
	b	a	b	a	b	a	b	a
$fil\ n^o1$	$1,04$	$-2,17$	$1,82$	$-1,13$	$1,69$	$-0,91$	$1,19$	$-0,50$
$fil\ n^o2$	$0,99$	$-1,49$	$1,92$	$-0,84$	$1,94$	$-0,86$	$1,22$	$-0,18$
$fil\ n^o3$	$nondisp.$		$1,73$	$-1,03$	$1,70$	$-0,93$	$1,12$	$-0,41$

Tab. C.2: Coefficients a et b de la relation (C.3) obtenus pour 3 fils chauds différents, pour chacun des 4 gaz pour $\gamma = 0,4$ à $T = 20^oC$. b varie avec la température comme $(250 - T_{ref})/(250 - T)$, tandis que a est indépendant de la température.

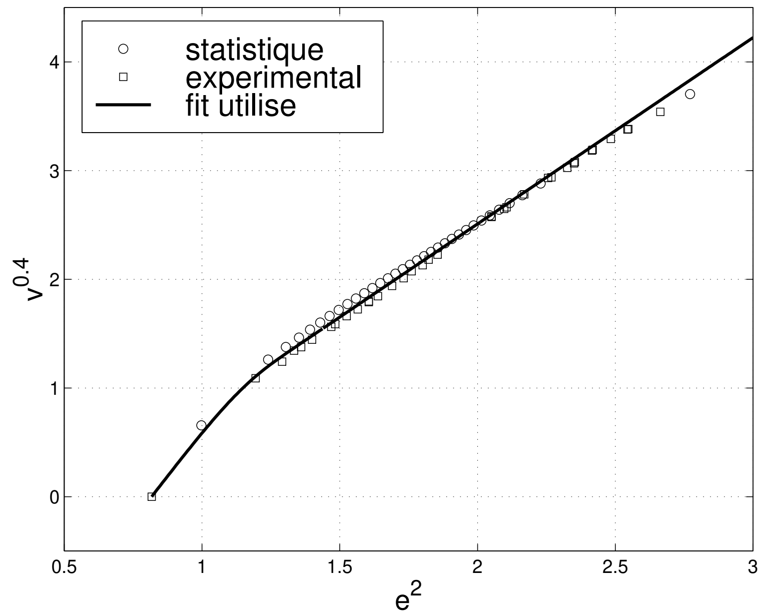

Fig. C.3: Comparaison entre les courbes d'étalonnage obtenues par la méthode statistique et la méthode expérimentale pour le CO_2.

de façon notable, même si les ordres de grandeur sont toujours les mêmes. Pour un fil donné, les variations d'un gaz à l'autre sont similaires pour les trois fils. Nous avons essayé plusieurs lois dimensionnelles pour décrire ce comportement en fonction du gaz, notamment en fonction des conductivités et du nombre de Prandtl, mais sans succès... Nous ne disposons ainsi que d'une indication qualitative, intéressante puisque rarement mise en évidence.

2.3 Comparaison entre les deux méthodes

La figure C.3 montre sur un même graphique les résultats obtenus par la méthode "statistique" et la méthode "expérimentale". La courbe en trait plein montre la courbe d'étalonnage effectivement utilisée. Les écarts sont de l'ordre des erreurs des mesures ex-

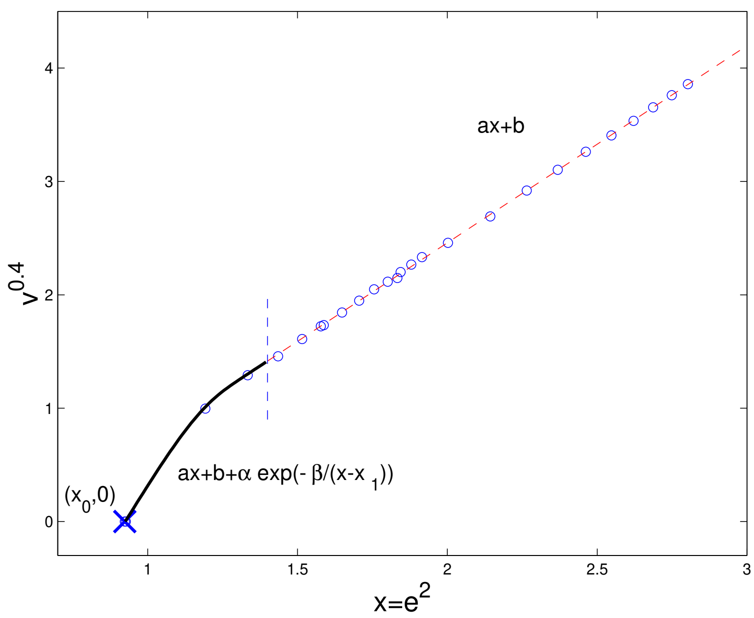

Fig. C.4: Exemple de raccordement C^{∞} entre les valeurs au repos et le comportement type "loi de King" des grandes vitesses.

périmentales. Les deux méthodes semblent de valeur comparable. Les points "expérimentaux" se trouvent souvent plus bas que les points "statistiques". Cette observation indique que la sonde de Pitot, située en amont du fil chaud, mesure peut-être une vitesse légèrement plus faible que celle réellement vue par le fil chaud. Le paragraphe suivant explique comment nous avons extrapolé l'étalonnage aux basses vitesses.

3 Petites vitesses : raccordement C^{∞} en 0

Le signal de vitesse mesuré quelques centimètres au-dessus du plan médian dans la *machine à laver* passe parfois près de zéro. Or il est très difficile d'étalonner un fil chaud à basse vitesse. La procédure d'étalonnage décrite plus haut concerne les vitesse supérieures à 1m.s^{-1} environ. Nous avons aussi accès à la valeur de la tension e au repos, lorsque la cuve est remplie de gaz sans entraînement. Nous avons donc utilisé un raccordement C^{∞} entre le point obtenu au repos, et les points obtenus grâce à la soufflerie. Si ce raccordement comporte une partie d'arbitraire, il a le mérite de fournir une approximation réaliste de la réponse du fil à basse vitesse (en tout cas plus réaliste que la loi de King). La nature C^{∞} du raccord assure l'absence d'artefact éventuel, notamment lors du calcul des accroissements ou d'une transformée en ondelette.

Nous nous intéressons à la fonction $v^{0.4} = f(e^2)$, en supposant connus un comportement linéaire $f(x) = ax + b$ pour $x = e^2 \geq e_1^2$ d'une part, et la valeur e_0 telle que $f(x_0 = e_0^2) = 0$ d'autre part. La fonction

$$f(x) = ax + b + \alpha \exp(\frac{\beta}{x - x_1}) \tag{C.5}$$

où α et β sont deux paramètres à déterminer, fournit un raccordement entre ces deux comportements. Il existe en réalité une infinité de couples de valeurs des paramètres α et β respectant les conditions mentionnées ci-dessus. Cependant, toutes ne donnent pas des allures "raisonnables" (changement de concavité par exemple) pour décrire le comportement d'un fil chaud. Nous avons choisi d'utiliser :

$$\begin{cases} \beta = 2x_1 \\ \alpha = -(ax_0 + b)\exp(\dfrac{\beta}{x_1 - x_0}) \end{cases} \tag{C.6}$$

Nous obtenons alors un raccordement "raisonnable", tel que celui représenté sur la figure C.4.

En définitive, la mise en œuvre ou non de ce raccord ne change pas fondamentalement les résultats obtenus. Il permet cependant d'affiner la description des basses vitesses, et surtout de mieux voir les zones où le signal de vitesse est redressé. Cet effet est visible à l'œil nu, directement sur le signal.

D. Refroidissement de la *machine à laver*

Même lorsque le gaz utilisé est de l'air, un échauffement du dispositif à fréquence de rotation élevée des moteurs est inévitable. Le rayonnement et la convection naturelle à la surface extérieure du dispositif ne sont pas assez efficaces pour évacuer la puissance électrique injectée. Les variations de température observées vont de quelques degrés à plusieurs dizaines de degrés, en quelques minutes ou dizaines de minutes. Les propriétés du gaz comme les réponses des capteurs s'en trouvent affectées. Deux solutions s'offrent à nous. Tenir compte de cette variation de température pour corriger les réponses des capteurs, notamment celle du fil chaud, ou installer un système de refroidissement. La première solution reste utilisable tant que la variation de température est suffisamment faible (quelques degrés). Pour le SF_6 qui est six fois plus lourd que l'air, l'échauffement attendu sera trop important et il faut prévoir un système de refroidissement. Nous précisons ici comment nous l'avons conçu et dimensionné de sorte à travailler systémtiquement à température ambiante.

1 Etude thermique sans refroidissement

Dans un premier temps, nous étudions l'évolution de la température $T(t)$ du gaz en fonction du temps en l'absence de dispositif de refroidissement. La puissance électrique fournie aux moteurs est dissipée d'une part dans les moteurs eux-mêmes (effet Joule, frottements, transmission) et d'autre part dans le fluide (dissipation visqueuse). La chaleur est finalement évacuée par convection naturelle et rayonnement dans l'air ambiant de la pièce. L'efficacité limitée de la convection naturelle a pour conséquence un échauffement relativement rapide et conséquent du gaz. Cet échauffement est fonction du gaz considéré. Plus le gaz est lourd, plus l'échauffement est problématique. Pour l'hélium, la question est superflue. Par contre, lorsque nous voudrons utiliser l'hexafluorure de soufre SF_6, les mesures de l'anémomètre à film chaud risquent d'être sérieusement perturbées.

1.1 Estimation de la puissance dissipée

Nous avons étudié la puissance électrique fournie au dispositif grâce aux courant et tension mesurés en sortie des alimentations des moteurs (voir **V**.1.3). Les fluctuations sont suffisamment faibles ici pour que cette démarche soit fiable (ce qui n'est pas le cas dans l'eau). La figure D.1 représente la puissance électrique injectée $\mathcal{P}_{élec}$ dans le dispositif en fonction du gaz utilisé (He, air, CO_2 et SF_6), à vitesse de rotation fixée (30 ou 40 Hz).

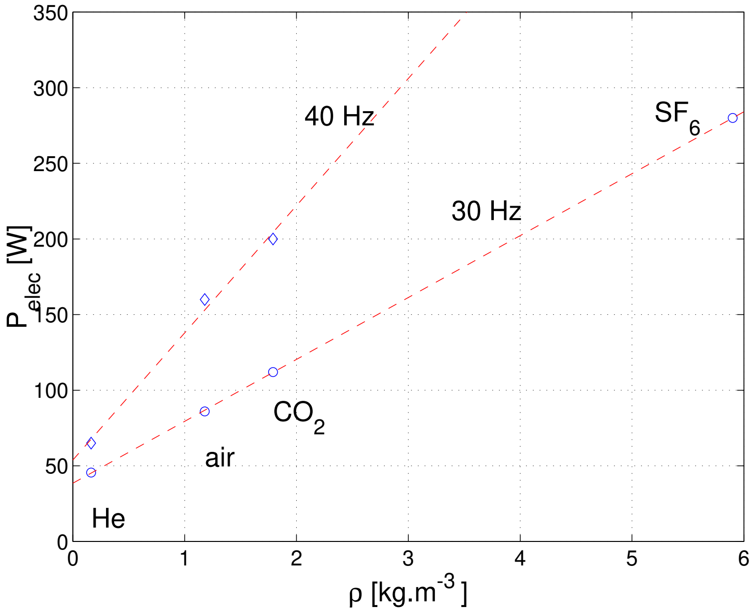

Fig. D.1: Puissance électrique injectée dans le dispositif en fonction de la masse molaire du gaz utilisé dans le dispositif expérimental *machine à laver*.

Elle se décompose en deux termes :

$$\mathcal{P}_{élec} = \mathcal{P}_{pertes} + \mathcal{P}_{visq} \tag{D.1}$$

où $\mathcal{P}_{pertes}$ décrit les pertes dues aux frottements au niveau des différentes parties mécaniques ainsi que les pertes Joule, et $\mathcal{P}_{visq}$ décrit la puissance de la dissipation visqueuse dans le gaz. Le comportement linéaire de $\mathcal{P}_{élec}$ avec la masse volumique ρ fournit plusieurs informations très précieuses quant à ces deux termes :

(a) L'ordonnée à l'origine correspond à la puissance dissipée indépendamment du gaz utilisé : c'est $\mathcal{P}_{pertes}$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{pertes} &\simeq 39 \text{ W}, \quad \text{à } 30 \text{ Hz}, \\ \mathcal{P}_{pertes} &\simeq 52 \text{ W}, \quad \text{à } 40 \text{ Hz}. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Cette fraction de puissance ne participe pas ou très peu à l'échauffement du gaz. C'est la fraction restante $\mathcal{P}_{visq} = \mathcal{P}_{élec} - \mathcal{P}_{pertes}$ qu'il faut considérer.

(b) La *dépendance linéaire*

$$\mathcal{P}_{visq} \propto \rho \tag{D.3}$$

de $\mathcal{P}_{visq}$ avec la masse volumique ρ est cohérente avec le raisonnement dimensionnel classique qui prédit

$$\mathcal{P}_{visq} = \alpha \underbrace{(\rho R^3).(R\Omega)^2}_{\sim m\, v^2} .\Omega = \alpha \rho \Omega^3 R^5 \tag{D.4}$$

Avec $\Omega = 2\pi \times 30$ rad.s^{-1} et $R = 10$ cm nous obtenons

$$\alpha \simeq 0.54 \tag{D.5}$$

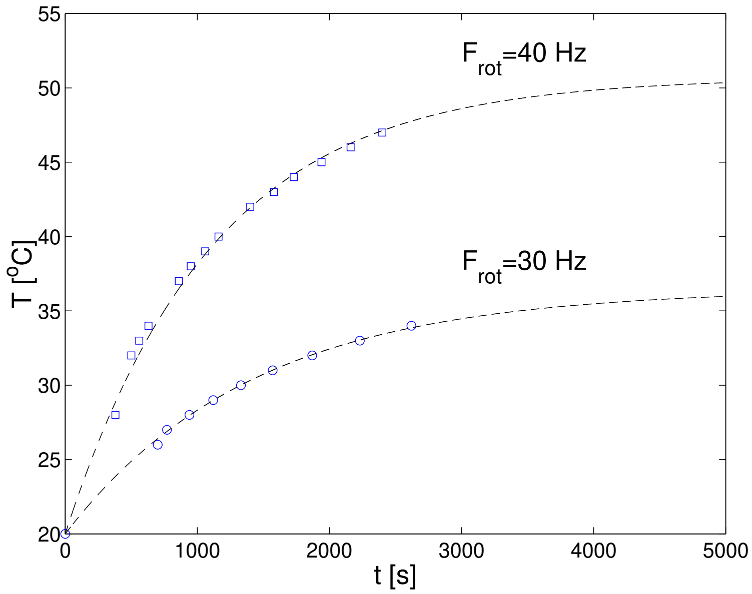

Fig. D.2: Evolution de la température avec le temps pour le CO_2 à deux fréquences de rotation (30 et 40 Hz) en régime contrarotatif. En pointillé, approximation par le modèle du 1.3.

En prenant $R = 10.7$ cm nous obtenons $\alpha \simeq 0.4$. Les mesures présentées par O. Cadot dans sa thèse [34] sont donc tout à fait cohérentes avec ce que nous observons. Les études précédentes similaires à la nôtre ont porté sur la dépendance en R et en Ω. Nous vérifions ici *la dépendance en* ρ. Ainsi, nous pouvons prédire la puissance dissipée $\mathcal{P}_{visq}$ par une expérience utilisant le SF_6, soit environ 240 W (ce qui s'est avéré vérifié expérimentalement). Le SF_6 coûte cher et pollue, de sorte qu'on ne peut envisager un trop grand nombre de manipulations infructueuses. En particulier, il est nécessaire de prévoir dès le départ des alimentations électriques suffisamment puissantes (et capables de fournir un courant suffisant). Il faut aussi anticiper le plus possible les difficultés éventuelles, telles qu'un échauffement trop important du gaz. Ces mesures vont nous permettre de bien dimensionner le dispositif de refroidissement.

(c) Enfin, il faut noter que, quel que soit le gaz utilisé, l'écoulement sera caractérisé à Ω fixée par le même taux de dissipation turbulente. Par exemple à 30 Hz :

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{P}_{visq}}{\rho V} = Cte \simeq 1900 \text{ W.kg}^{-1} \tag{D.6}$$

Nous avons travaillé à *taux de dissipation* ε *constant.*

1.2 Evolution de la température T(t)

Intéressons-nous maintenant à la température du gaz. La figure D.2 présente des mesures de températures effectuées en régime contrarotatif à 2 fréquences de rotation des

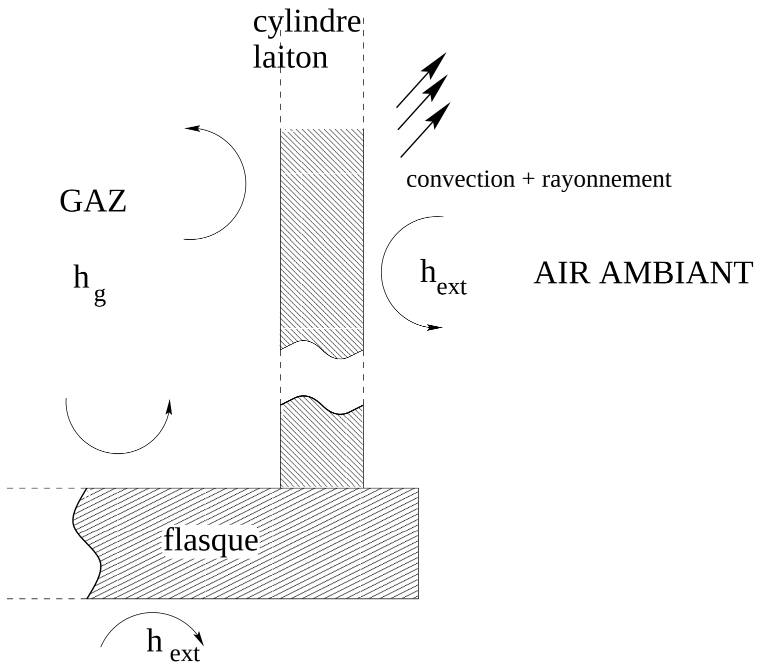

Fig. D.3: Echanges thermiques en l'absence de dispositif de refroidissement.

disques (30 et 40 Hz) dans le dispositif no 2 rempli de dioxyde de carbone (CO_2). Il s'agit de modéliser de façon simple l'évolution de $T(t)$ pour en déduire les ordres de grandeur des paramètres mis en jeu. Cette modélisation nous permet de prédire $T(t)$ pour un gaz quelconque. L'étape suivante, c'est-à-dire le dimensionnement d'un système de refroidissement, sera dès lors possible avec une bonne précision.

1.3 Modélisation de T(t)

On peut simplement modéliser l'évolution de la température du gaz, en l'absence de système de refroidissement, à partir d'un bilan de puissance (voir schéma D.3). Les trois approximations suivantes sont pleinement justifiées :

(a) la puissance consommée par le réchauffement du gaz est négligée devant celle consommée par l'augmentation de température de la boîte métallique,

(b) la température de la boîte métallique s'homogénéise de façon quasi-instantanée (car $\lambda_{th}/e \gg h_{\text{int}}$),

(c) les échanges sur la paroi interne décrits par h_{int} sont très rapides (convection turbulente interne) par rapport aux échanges sur la paroi externe décrits par h_{ext} (convection naturelle externe) de sorte qu'on peut considérer que $T_{\text{boîte}} \simeq T_{\text{gaz}}$ ($h_{\text{ext}} \ll h_{\text{int}}$).

Nous pouvons donc raisonner dans le cadre de l'approximation d'un régime quasi stationnaire, et écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{visq}} &\simeq \mathcal{P}_{\text{boîte}} + \mathcal{P}_{\text{ext}} \\ &\simeq \mathrm{m}_{\text{boîte}} C_p^{\text{métal}} \frac{dT_{\text{boîte}}}{dt} + h_{\text{ext}} S_{\text{boîte}} \left(T_{\text{boîte}} - T_{\text{ext}}\right) \end{aligned} \tag{D.7}$$

où h_{ext} est le coefficient surfacique d'échange conducto-convectif à la paroi externe de la boîte et $S_{\text{boîte}}$ est la surface externe de la boîte. Autrement dit, la puissance injectée dans l'écoulement (entièrement dissipée par viscosité) sert essentiellement d'une part à chauffer la boîte métallique et d'autre part à réchauffer l'air ambiant de la salle de manipulation[1]. La puissance dissipée par viscosité sert à chauffer le gaz, mais surtout à chauffer la boîte métallique et l'air de la pièce. Grâce aux approximations précédentes, le bilan de puissance s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{visq}} = m_{\text{boîte}} c_p^{\text{métal}} \frac{dT}{dt} + h_{\text{ext}} S_{\text{boîte}} (T - T_{\text{ext}}) \tag{D.8}$$

d'où :

$$T(t) \simeq T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{\text{visq}}}{h_{\text{ext}} S_{\text{boîte}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{h_{\text{ext}} S_{\text{boîte}}}{m_{\text{boîte}} c_p^{\text{métal}}} t \right) \right] \tag{D.9}$$

La température évolue vers une température stationnaire T_{stat} avec un temps caractéristique τ donnés par :

$$\begin{aligned} T_{\text{stat}} &= T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{\text{visq}}}{h_{\text{ext}} S_{\text{ext}}} \\ \tau &= \frac{h_{\text{ext}} S_{\text{ext}}}{m_{\text{boîte}} c_p^{\text{métal}}} \end{aligned} \tag{D.10}$$

Les ordres de grandeur à prendre en compte sont ici

$$\begin{aligned} S_{\text{ext}} &= 0,37 \text{ m}^2, \\ m_{\text{boîte}} c_p^{\text{métal}} &= 5,78.10^3 \text{ J.K}^{-1}, \\ h_{\text{ext}} &\sim 10 \text{ à } 15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \\ \mathcal{P}_{\text{visq}} &= \begin{cases} \mathcal{P}_{\text{visq}} \simeq 70 \text{ W} & \text{pour } CO_2, F_{rot} = 30 \text{ Hz}, \\ \mathcal{P}_{\text{visq}} \simeq 160 \text{ W} & \text{pour } CO_2, F_{rot} = 40 \text{ Hz}. \end{cases} \end{aligned} \tag{D.11}$$

En ajustant les paramètres h_{ext} et $\mathcal{P}_{\text{visq}}$ un peu plus précisément de sorte que le modèle décrive correctement les mesures on obtient[2] (voir fig. D.2)

- <u>à 30 Hz :</u>

$$\begin{cases} h_{\text{ext}} & \simeq 11 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}, \\ \mathcal{P}_{\text{visq}} & \simeq 67 \text{ W}, \\ T_{\text{stat}} - T_{\text{ext}} & \simeq 16,5 \text{ K}, \\ \tau & \simeq 24 \text{ min}. \end{cases}$$

- <u>à 40 Hz :</u>

$$\begin{cases} h_{\text{ext}} & \simeq 14 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}, \\ \mathcal{P}_{\text{visq}} & \simeq 159 \text{ W}, \\ T_{\text{stat}} - T_{\text{ext}} & \simeq 30.7 \text{ K}, \\ \tau & \simeq 19 \text{ min}. \end{cases}$$

[1] Il faut d'ailleurs noter que l'ouverture d'une fenêtre perturbe légèrement les mesures en modifiant les échanges externes (h_{ext})...

[2] En pratique il faut rendre compte correctement de $T_{\text{stat}} - T_{\text{ext}}$ et τ. On observe tout à fait logiquement que h_{ext} est plus grand à 40 Hz qu'à 30 Hz. Ceci est dû au gradient moyen de température à la paroi externe du cylindre, plus important à 40 Hz qu'à 30 Hz : les pertes par convection naturelle et rayonnement sont d'autant plus grandes.

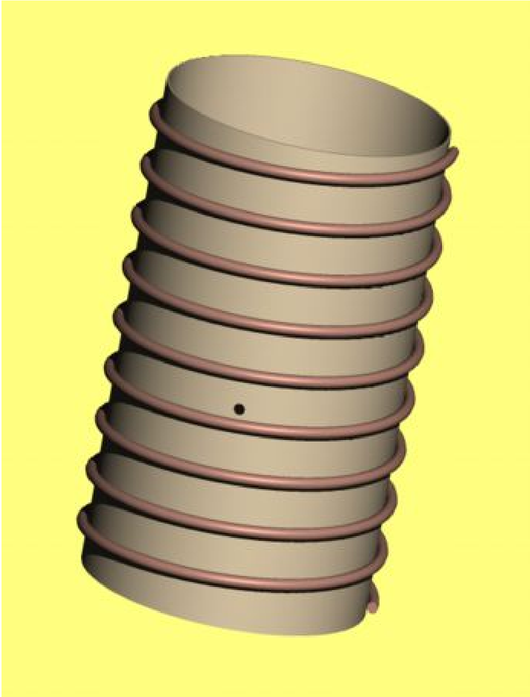

Fig. D.4: Dispositif de refroidissement. Un serpentin de cuivre est soudé à l'étain sur la paroi du cylindre en laiton (9 tours environs). L'eau froide du robinet circule dans le serpentin.

1.4 Conclusion

L'étude que nous venons de décrire permet de connaître assez précisément le comportement thermique de notre dispositif "machine à laver" en l'absence de système de refroidissement. A partir de ce travail pour le CO_2, nous avons une idée assez précise grâce à (D.2) et (D.4) de la puissance électrique qu'il faut être capable de fournir à 30 Hz lorsque le gaz est du SF_6, soit 280 W environ, correspondant à $\mathcal{P}_{visq} \simeq 240$ W. Nous savons alors grâce à (D.10) qu'il faut s'attendre à une augmentation de température de l'ordre de 50 à 60 K en quelques dizaines de minutes ! Les mesures issues d'un anémomètre à film chaud fonctionnant à 250 °C seraient alors sérieusement perturbées. La mise en place d'un système de refroidissement s'avère indispensable.

2 Refroidissement par un serpentin à eau

2.1 Modélisation

Le principe retenu est celui d'un serpentin à eau en cuivre soudé à la paroi du cylindre en laiton , le serpentin étant alimenté par l'eau courante supposée au plus à température ambiante **(schéma fig. D.4)**. Il s'agit de vérifier qu'un tel système permettra un refroidissement efficace du gaz, en limitant l'élévation de température à 10°C au plus par exemple.

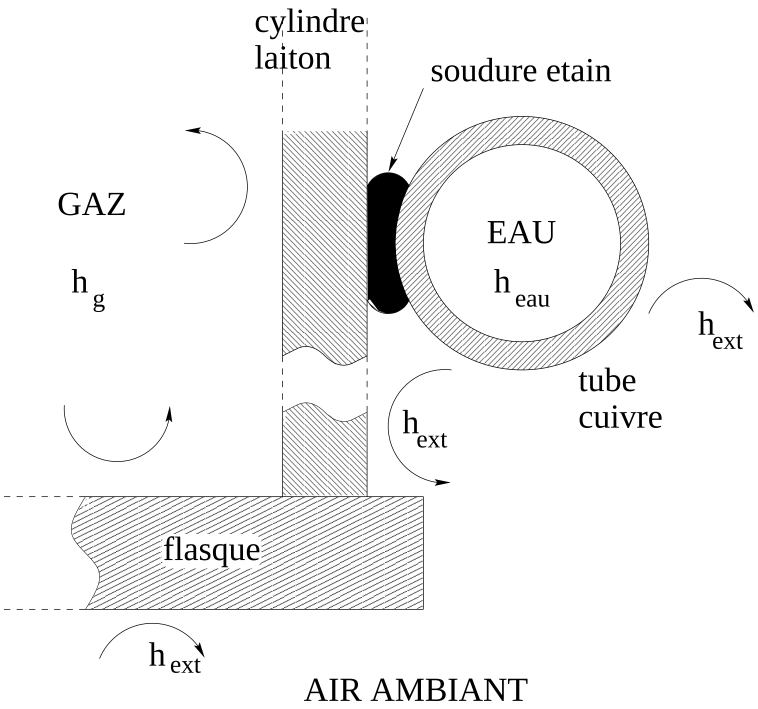

Fig. D.5: Description schématique des échange thermique entre le gaz à l'intérieur du cylindre de laiton, et l'extérieur (air ambiant + eau du serpentin).

Le dessin D.5 pose le problème thermique à considérer en faisant apparaîre les différents transferts mis en jeu. La longueur du serpentin, sans être excessive, doit permettre un refroidissement à la fois efficace et homogène. Dans notre cas, on ne gagne plus grand chose au-delà de 7 à 8 m de tube, soit 9 tours du cylindre environ. Nous allons utiliser plusieurs approximations, toutes amplement justifiées :

H1 l'approximation des régimes quasi-permanents (tous les matériaux sont très conducteurs, le mouvement turbulent du gaz assure un bon transfert à la paroi interne du cylindre, l'eau circule avec un bon débit, et l'air extérieur se comporte comme un thermostat),

H2 convection naturelle et rayonnement à la surface extérieure du dispositif négligeables ($h \sim 10$ W.m^{-2}.K^{-1}) devant le refroidissment par le serpentin,

H3 isothermie instantanée du cylindre en laiton ($\dfrac{\lambda_{laiton}}{H/9} \sim 10000 \gg h_{gaz}$),

H4 isothermie instantanée des flasques en dural ($\dfrac{\lambda_{dural}}{e_{flasque}} \sim 10000 \gg h_{gaz}$),

H5 isothermie instantanée du tube de cuivre ($\dfrac{\lambda_{Cu}}{e_{tube}} \sim 10000 \gg h_{eau}$).

Nous pouvons alors utiliser l'analogie électrique pour le régime stationnaire, mais aussi pour estimer un temps caractéristique du régime transitoire. Les matériaux solides, tous des métaux, sont de bons voire très bons conducteurs. Les conductances jouant un rôle limitant viennent éventuellement des transferts conducto-convectifs aux parois entre gaz et

	λ_{th} W.m^{-2}.K^{-1}	ρ kg.m^{-3}	c_p J.kg^{-1}.K^{-1}
cuivre	400	8900	383
laiton	110	8500	385
dural	164	2789	883
étain	64		
eau	0.6	1000	4180

Tab. D.1: Conductivité thermique λ_{th}, masse volumique ρ et capacité thermique massique c_p pour le cuivre, le laiton, le dural et l'étain.

cylindre d'une part, et entre tube et eau d'autre part. Des ordres de grandeur raisonnables[3] des coefficients caractérisant ces transferts sont :

$$\begin{cases} h_{gaz} \simeq 100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \\ h_{eau} \simeq 1000 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \end{cases} \tag{D.12}$$

De plus nous négligeons le refroidissement à travers les flasques situées aux extrémités du cylindre.

2.2 Dimensionnement : analogie électrique

Le problème électrique analogue tenant compte de ces approximations est décrit par **le schéma D.6** où sont reportées les conductances thermiques mises en jeu.

- $\left.\begin{array}{lcl} S_{cyl} & = & 0,33 \text{ m}^2 \\ h_{gaz} & \simeq & 100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow G_{gaz} = h_{gaz} S_{cyl} \simeq 30 \text{ W.K}^{-1}$
- $G_{soud+tube} \simeq \left(\dfrac{e_S}{\lambda_{étain} S_S} + \dfrac{e_{tube}}{\lambda_{Cu} S_{tube}} \right)^{-1} \simeq \dfrac{\lambda_{étain} S_S}{e_S} \simeq 500 \text{ W.K}^{-1}$
- $\left.\begin{array}{lcl} S_{tube} & \simeq & 0,20 \text{ m}^2 \\ h_{eau} & \simeq & 1000 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow G_{eau} = h_{eau} S_{tube} \simeq 200 \text{ W.K}^{-1}$

Nous obtenons alors avec une très bonne approximation

$$T_{Cyl} \simeq T_{tube} \simeq T_{eau} \tag{D.13}$$

La variation maximale de température du gaz à laquelle il faut s'attendre en régime stationnaire est de l'ordre de

$$\Delta T_{gaz} \simeq \frac{\mathcal{P}_{visq}}{h_{gaz} S_{cyl}} \tag{D.14}$$

soit dans le cas du SF_6 (le plus défavorable) :

$$\Delta T_{SF_6} \simeq \frac{240}{30} \leq 10 \text{ °}C \tag{D.15}$$

[3] Pour h_{gaz} on peut se baser sur les résultats existant pour les plaques planes. Pour h_{eau}, l'ordre de grandeur fourni par les formules pour un tube rectiligne est cohérent avec ce choix. Dans les deux cas, ce sont des ordres de grandeurs courants [161].

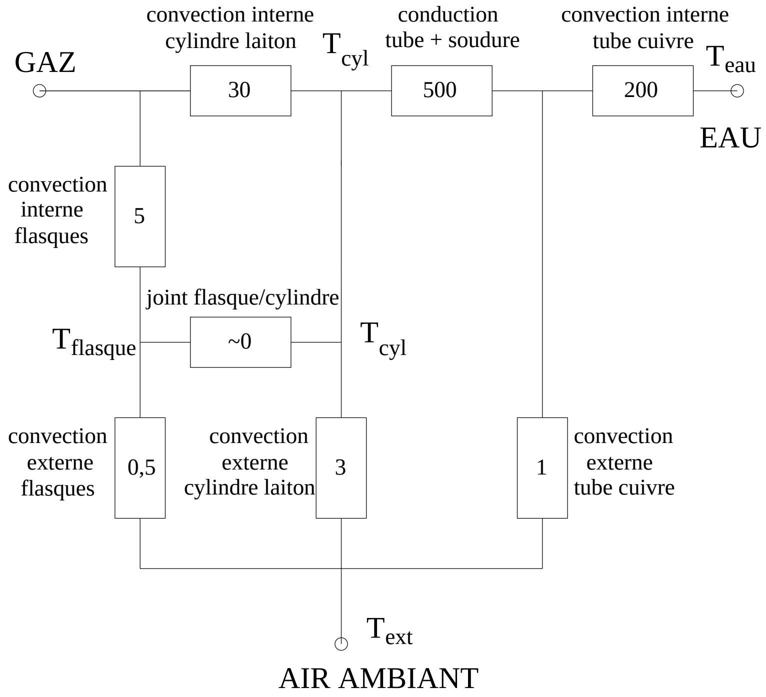

Fig. D.6: Analogie électrique du problème thermique. Les nombres sont des conductances thermiques, en $W.m^{-1}$.

Il reste à vérifier que la température de l'eau qui circule dans le tube en cuivre est pratiquement constante au cours de son trajet. Un échauffement important de l'eau entre l'entrée et la sortie serait synonyme d'inefficacité du système... Supposons la température de la paroi interne du tube de cuivre constante égale à $T_{tube} \neq T_{eau}$. La température de l'eau le long du tube obéit à

$$\frac{dT_{eau}}{dx} + \frac{\pi h_{eau} d}{D_m^{H_2O} c_p^{H_2O}} (T_{eau}(x) - T_{tube}) = 0 \qquad \text{(D.16)}$$

La longueur typique sur laquelle on peut s'attendre à observer une variation notable de T_{eau} est

$$L = \frac{D_m^{H_2O} c_p^{H_2O}}{\pi h_{eau} d} \simeq 80 \text{ m.} \qquad \text{(D.17)}$$

or le tube fait moins de 8 m de long, donc la température de l'eau varie très peu : l'eau assure un refroidissement aussi efficace au début du tube qu'à la fin.

3 Conclusion

La mise en œuvre expérimentale s'est avérée très satisfaisante. Nous avons pu travailler à température ambiante pour tous les gaz utilisés : hélium, air, dioxyde de carbone et hexafluorure de soufre. Ainsi nous avons pu utiliser les étalonnages du fil chaud en appliquant les méthodes linéaires habituelles de compensation des faibles variations de température pour les coefficients de la loi de King. Nous considérons que le capteur de pression est pratiquement insensible à des variations de températures limitées à quelques degrés Celsius autour de la température ambiante.

E. Fiches de sécurité des gaz : He, CO_2, SF_6

Bibliographie

[1] P. Abry. *Ondelettes et Turbulence - Multirésolutions, Algorithmes de Décomposition, Invariance d'Echelle et Signaux de Pression.* Diderot, Editeur des Sciences et des Arts, Paris, 1997.

[2] P. Abry. *Lois d'échelle, multirésolutions et ondelettes. Application au télétrafic informatique et à la turbulence développée.* Habilitation à Diriger les Recherches, Université Claude Bernard-LYON I, 2001.

[3] P. Abry, L. Delbeke, et P. Flandrin. Wavelet-based estimator for the self-similarity parameter of α-stable processes. Dans *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.*. IEEE, Phoenix, USA, 1999.

[4] P. Abry, S. Fauve, P. Flandrin, et C. Laroche. Analysis of pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *Journal de Physique II France*, **4**, pp. 725–733, May 1994.

[5] P. Abry, P. Flandrin, M. Taqqu, et D. Veitch. *Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data.* Dans Park et Willinger [127], 2000.

[6] P. Abry, P. Gonçalvès, et P. Flandrin. *Wavelets, spectrum estimation and $1/f$ processes*, chapitre 103. Springer-Verlag, New-York, 1995. Wavelets and Statistics, Lecture Notes in Statistics.

[7] P. Abry, P. Gonçalvès, et J. Lévy Véhel, rédacteurs. *Lois d'échelle et fractales.* Hermès, France, 2001. Traité information, commandes, contrôle.

[8] P. Abry et F. Sellan. The wavelet-based synthesis of fractional brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer : remarks and fast implementation. *Applied and computational harmonic analysis*, **3**, pp. 377–383, 1996.

[9] G. Amati, F. Toschi, S. Succi, et R. Piva. Scaling exponents in turbulent channel flow. Dans Kluwer, rédacteur, *Advances in Turbulence VII*, pp. 159–162, 1998.

[10] V. A. Ambarzumian. On the theory of brightness fluctuations in the Milky Way. *Soviet Physics–Doklady*, **44**, 6, pp. 223–226, 1944.

[11] P.-O. Amblard et J.-M. Brossier. On the cascade in fully developed turbulence. The propagator approach versus the Markovian description. *Eur. Phys. J. B*, **12**, pp. 579–582, 1999.

[12] B. Andreotti. Studying Burgers' models to investigate the physical meaning of the alignments statistically observed in turbulence. *Phys. Fluids*, **9**, 3, pp. 735–742, 1997.

[13] B. Andreotti. *Action et réaction entre étirement et rotation, du laminaire au turbulent.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1999.

[14] B. Andreotti, Y. Couder, et S. Douady. Experimental investigation of the turbulence near a large scale vortex. *Europ J. Mech./B Fluids*, **17**, 4, pp. 451–470, 1998.

[15] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, et J.-F. Elezgaray, J. Muzy. *Ondelettes, multifractales et turbulences*. Diderot, Editeur des Sciences et des Arts, Paris, 1995.

[16] A. Arneodo, E. Bacry, et J. Muzy. Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis : Exact results. *J. Stat. Phys.*, **70**, pp. 635–674, 1994.

[17] A. Arneodo, E. Bacry, et J. Muzy. Random cascade on wavelet dyadic trees. *J. Math. Phys.*, **39**, 8, pp. 4142–4164, 1998.

[18] A. Arneodo, C. Baudet, R. Benzi, B. Castaing, R. Chavarria, S. Ciliberto, F. Chilla, B. Dubrulle, B. Hebral, J. Herweijer, J. Maurer, J.-F. Muzy, A. Noullez, J. Peinke, W. van de Water, et H. Willaime. Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at Reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity. *Europhysics Letters*, **34**, 6, pp. 411–416, 1996.

[19] A. Arneodo, N. Decoster, et S. Roux. A wavelet-based method for multifractal image analysis. I. Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *Eur. Phys. J. B*, **15**, pp. 567–600, 2000.

[20] A. Arneodo, S. Manneville, et J.-F. Muzy. Towards log-normal statistics in high Reynolds number turbulence. *Eur. Phys. J. B*, **1**, pp. 129–140, 1998.

[21] A. Arneodo, J. Muzy, et S. Roux. Experimental analysis of self-similarity and random cascade processes : application to fully developed turbulence data. *Journal de Physique II France*, **7**, pp. 363–370, 1997.

[22] W. Ashurst, A. Kerstein, R. Kerr, et G. Gibson. Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier-Stokes turbulence. *Phys. Fluids*, **30**, pp. 2343–2353, 1987.

[23] R. Averkamp et C. Houdré. Some distributional properties of the continuous wavelet transform of random processes. *IEEE Trans. Info. Theory*, **44**, 3, pp. 1111–1124, 1998.

[24] E. Bacry, J. Delour, et J. Muzy. Multifractal random walk. *Phys. Rev. E*, **64**, pp. 026103, 2001.

[25] I. Barin et O. Knacke. *Thermodynamical properties of inorganic substances*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[26] C. Baudet, O. Michel, et J. Williams. Detection of coherent vorticity structures using time-scale resolved acoustic spectroscopy. *Physica D*, **128**, pp. 1–17, 1999.

[27] F. Belin, J. Maurer, P. Tabeling, et H. Willaime. Observation of intense filaments in fully developed turbulence. *Journal de Physique II France*, **6**, pp. 573–583, April 1996.

[28] A. Benassi, S. Jaffard, et D. Roux. Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators. *Revista Mathematica Iberoamericana*, **13**, 1, pp. 19–89, 1997.

[29] R. Benzi, L. Biferale, et F. Toschi. Multiscale velocity correlations in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 15, pp. 3244–3247, 1998.

[30] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicione, C. Baudet, et F. Massaioli. Extended self similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, **48**, pp. R29–R32, 1993.

[31] M. Borgas. The multifractal lagrangian nature of turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **342**, pp. 379–411, 1993.

[32] M.-E. Brachet. Géométrie des structures à petite échelle dans le vortex de Taylor-Green. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **311**, pp. 775, 1990.

[33] P. L. Butzer et H. Berens. *Semi-groups of operators and approximation*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, 1967.

[34] O. Cadot. *Etude des structures de basse pression dans la turbulence développée*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris 7, 1995.

[35] O. Cadot, S. Douady, et Y. Couder. Characterization of the low-pressure filaments in a three dimensional turbulent shear flow. *Phys. Fluids*, **7**, 3, pp. 630, 1995.

[36] R. Camussi et G. Guj. Orthonormal wavelet decomposition of turbulent flows : intermittency and coherent structures. *J. Fluid Mech.*, **348**, pp. 177, 1997.

[37] R. Camussi et G. Guj. Experimental analysis of intermittent coherent structures in the near field of a high Re turbulent jet flow. *Phys. of Fluids*, **11**, 2, pp. 423–431, 1999.

[38] R. Camussi et G. Guj. Statistical analysis of local turbulent energy fluctuations. *J. Fluid Mech.*, **382**, pp. 1–26, 1999.

[39] B. Castaing. Conséquences d'un principe d'extrémum en turbulence. *Journal de Physique France*, **50**, pp. 147–156, 1989.

[40] B. Castaing. The temperature of turbulent flows. *J. Phys. II France*, **6**, pp. 105–114, 1996.

[41] B. Castaing. Turbulence : statistical approach. Dans B. Dubrulle, F. Graner, et D. Sornette, rédacteurs, *Scale invariance and beyond*, pp. 225–234. Centre de Physique Les Houches, EDP Sciences - Springer, Cambridge, MA, USA, 1997.

[42] B. Castaing et B. Dubrulle. Fully developed turbulence : a unifying point of view. *J. Phys. II France*, **5**, pp. 895–899, 1995.

[43] B. Castaing, Y. Gagne, et E. Hopfinger. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D*, **46**, pp. 177–200, 1990.

[44] B. Castaing, Y. Gagne, et M. Marchand. Log-similarity for turbulent flows ? *Physica D*, **68**, pp. 387, 1993.

[45] P. Chainais. *Etude des Structures de Basse Pression dans un Ecoulement Turbulent*. Rapport de stage de dea, Laboratoire de Physique, ENS Lyon, 1997. Disponible sur demande, et www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE.

[46] P. Chainais, P. Abry, et J. Pinton. Intermittency and coherent structures in a turbulent flow : a wavelet analysis of joint pressure and velocity measurements. *Phys. Fluids*, **11**, 11, pp. 3524–3539, 1999.

[47] P. Chainais, P. Abry, et D. Veitch. Multifractal analysis and α-stable processes : a methodological contribution. Dans *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.*. IEEE, Istanbul, 2000.

[48] P. Chainais, E. Lévêque, P. Abry, et C. Baudet. Remarkable features of multiplier distributions in turbulence. Dans *Advances in Turbulence VIII*. ETC8, Kluwer, Barcelone, 2000.

[49] P. Chainais, S. Roux, P. Abry, et D. Veitch. Analyse et modélisation de séries temporelles à l'aide de cascades. Application à l'étude du trafic internet. Dans *Actes du GRETSI*. Toulouse, 2001.

[50] A. B. Chhabra et K. R. Sreenivasan. Scale-invariant multiplier distributions in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 18, pp. 2762–2765, 1992.

[51] J.-F. Coeurjolly. *Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2000.

[52] S. Cohen. *Champs localement auto-similaires*. Dans Abry *et al.* [7], 2001. Traité information, commandes, contrôle.

[53] G. Comte-Bellot. Hot-wire anemometry. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pp. 209–231, 1976.

[54] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

[55] J. Davoudi et M. Reza Rahimi Tabar. Theoretical model for the Kramers-Moyal description of turbulent cascades. *Phys. Rev. Letters*, **82**, 8, pp. 1680–1683, 1999.

[56] N. Decoster, S. Roux, et A. Arneodo. A wavelet-based method for multifractal image analysis. II. Applications to synthetic multifractal rough surfaces. *Eur. Phys. J. B*, **15**, pp. 739–764, 2000.

[57] L. Delbeke. *Wavelet based estimators for the scaling index of a self-similar process with stationary increments*. Thèse de doctorat, KU Leuven, Belgique, 1998.

[58] L. Delbeke et P. Abry. Stochastic integral representation and properties of the wavelet coefficients of linear fractional stable motion. *submitted to Stochastic Processes and their Applications*, 1997. Preprint.

[59] L. Delbeke et P. Abry. Stochastic integral representation and properties of the wavelet coefficients of the linear fractional stable motion. *Stochastic Processes and their Aplications*, **86**, pp. 177–182, 2000.

[60] B. Dernoncourt, J.-F. Pinton, et S. Fauve. Experimental study of vorticity filaments in a turbulent swirling flow. *Physica D*, **117**, pp. 181–190, 1998.

[61] S. Douady et Y. Couder. On the dynamical structures observed in 3D turbulence. Dans R. Benzi, C. Basdevant, et S. Ciliberto, rédacteurs, *Turbulence in extended systems*, pp. 3–17. Nova Science Commack NY, 1993.

[62] S. Douady, Y. Couder, et M.-E. Brachet. Direct observation of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 8, pp. 983, 1991.

[63] B. Dubrulle. Intermittency in fully developed turbulence : log-Poisson statistics and scale invariance. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, pp. 969, 1994.

[64] B. Dubrulle. Finite size scale invariance. *Eur. Phys. J. B*, **14**, pp. 757–771, 2000.

[65] B. Dubrulle et F. Graner. Possible statistics of scale invariant systems. *J. Phys. II France*, **6**, pp. 797–816, 1996.

[66] B. Dubrulle et F. Graner. Scale invariance and scaling exponents in fully developed turbulence. *J. Phys. II France*, **6**, pp. 817–824, 1996.

[67] S. Fauve, C. Laroche, et B. Castaing. Pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *J. Phys. II France*, **3**, 271-278, 1993.

[68] A. Feldmann, A. Gilbert, et W. Willinger. Data networks as cascades : investigating the multifractal nature of internet WAN traffic. Dans *Proceedings of the ACM/SIGCOMM'98*. Vancouver, Canada, 1998.

[69] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, tome 2. John Wiley and Sons, Inc., New-York, London, Sidney, 1966.

[70] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, tome 1. John Wiley and Sons, Inc., New-York, London, Sidney, 1966.

[71] P. Flandrin. On the spectrum of fractional Brownian motions. *IEEE Trans. on Info. Theory*, **35**, pp. 197–199, 1989.

[72] P. Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motions. *IEEE Trans. on Info. Theory*, **38**, pp. 910–917, 1992.

[73] P. Flandrin. *Temps-Fréquence*. Hermès, Paris, 1998.

[74] R. Friedrich et J. Peinke. Description of a turbulent cascade by a Fokker-Plank equation. *Physical Review Letters*, **78**, 5, pp. 863–866, 1997.

[75] R. Friedrich et J. Peinke. Statistical properties of a turbulent cascade. *Physica D*, **102**, pp. 147–155, 1997.

[76] U. Frisch. *Turbulence. The legacy of A. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.

[77] U. Frisch et G. Parisi. Fully developed turbulence and intermittency. Dans M. Ghil, R. Benzi, et G. Parisi, rédacteurs, *Proc. of Int. School on Turbulence and predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, p. 84. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[78] Y. Gagne. *Etude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence développée*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Scientifique et Médicale et Inst. Nat. Poly. de Grenoble, 1987.

[79] E. Gaudin, B. Protas, S. Guyon-Durand, A. Wojciechowski, et J. Wesfreid. Spatial properties of velocity structure functions in turbulent wake flows. *Phys. Rev. E*, **57**, pp. R9–R12, 1998.

[80] B. V. Gnedenko et A. N. Kolmogorov. *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusetts, 1968.

[81] P. Gonçalvès et R. H. Riedi. Wavelet analysis of fractional Brownian motion in multifractal time. Dans *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.*. IEEE, Phoenix, USA, 1999.

[82] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions part I : results valid for all functions. *SIAM J. Math. Anal.*, **28**, 4, pp. 944–970, 1997.

[83] J. Jimenez, A. A. Wray, P. G. Saffman, et R. S. Rogallo. The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **255**, pp. 65–90, 1993.

[84] H. Kahalerras, Y. Malécot, Y. Gagne, et B. Castaing. Intermittency and Reynolds number. *Phys. of Fluids*, **10**, 4, pp. 910–921, april 1998.

[85] N. van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Elsevier Science, North-Holland Personal Library, 1997.

[86] L. Kaplan et J. Kuo. Extended self-similarity for fractional brownian motion. *IEE Trans. on Sig. Proc.*, **42**, 12, pp. 3526–3530, 1994.

[87] T. von Kármán et L. Howarth. On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. Roy. Soc.*, **A164**, pp. 192–215, 1938.

[88] S. Kida et K. Okhitani. Spatiotemporal intermittency and instability of a forced turbulence. *Phys. Fluids*, **A4**, 5, pp. 1018–1027, 1992.

[89] A. Kolmogorov. Wienersche spiralen und einige andere interessante kurven im Hilbertschen raum. *C.R. (Doklady) Acad. Sci.*, **26**, pp. 115–118, 1940.

[90] A. N. Kolmogorov. Uber die analytischen Methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.*, **104**, 1931.

[91] A. N. Kolmogorov. a) Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. b) The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. c) On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. Dans S. Friedlander et L. Topper, rédacteurs, *Turbulence, Classic papers on statistical theory*, pp. 151–161. Interscience publishers, 1941.

[92] A. N. Kolmogorov. A refinement hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. of Fluid Mech.*, **13**, pp. 82–85, 1962.

[93] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, et E. Bodenschatz. Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. *Nature*, **409**, pp. 1017, 2001.

[94] A. La Porta, G. A. Voth, F. Moisy, et E. Bodenschatz. Using cavitation to measure statistics of low pressure events in large Reynolds number turbulence. *Phys. of Fluids*, **12**, 6, pp. 1485–1496, 2000.

[95] J. Lacoume, P. Amblard, et P. Comon. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Masson, Paris, 1997.

[96] L. Landau. On the energy loss of fast particles by ionization. *Journal of Physics*, **8**, 4, pp. 201–205, 1944.

[97] D. R. Lide, rédacteur. *Handbook of chemistry and physics, 80th edition*. CRC Press, 2000.

[98] T. Lundgren. Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids*, **25**, 12, pp. 2193–2203, 1982.

[99] T. Lundgren. A small-scale turbulence model. *Phys. Fluids A*, **5**, 6, pp. 1472–1483, 1993.

[100] Y. Malécot. *Intermittence en turbulence 3D : statistiques de la vitesse et de la vorticité*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, oct 1998.

[101] Y. Malécot, C. Auriault, H. Kahalerras, Y. Gagne, O. Chanal, B. Chabaud, et B. Castaing. A statistical estimator of turbulence intermittency in physical and numerical experiments. *J. Fluid Mech.*, 1999. Under consideration for publication.

[102] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1998.

[103] B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. of Fluid Mech.*, **62**, pp. 331–358, 1974.

[104] B. Mandelbrot. *Fractals and scaling in finance*. Springer, New-York, 1997.

[105] B. Mandelbrot. A multifractal walk down Wall Street. *Scientific American*, **280**, pp. 70–73, 1999.

[106] B. Mandelbrot et J. van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Reviews*, **10**, pp. 422–437, 1968.

[107] P. Marcq et A. Naert. A Langevin equation for the energy cascade in fully developed turbulence. *Physica D*, **124**, pp. 368–381, 1998.

[108] E. Masry. The wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional Brownian motion. *IEEE Trans. Info. Theory*, **39**, 1, pp. 260–264, 1993.

[109] J. Mathieu et J. Scott. *An introduction to turbulent flow*. Cambridge University Press, 2001. Second tome, à paraître.

[110] J. Maurer, P. Tabeling, et G. Zocchi. Statistics of turbulence between two counter rotating discs in low temperature helium gas. *Europhys. Lett.*, **26**, pp. 31–36, 1994.

[111] Y. Meyer. *Les ondelettes. Algorithmes et applications*. Armand Colin, Paris, 1992.

[112] F. Moisy. Investigation of Low-Pressure Filaments using Cavitation, April 1998. Unpublished internal report at Cornell University, collaboration with A. La Porta, G. Voth and E. Bodenschatz.

[113] G. Molchan. Turbulent cascades : limitations and a statistical test of the lognormal hypothesis. *Phys. Fluids*, **9**, 8, pp. 2387–2396, 1997.

[114] A. S. Monin et A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*. M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1975.

[115] N. Mordant. *Mesures de vitesse lagrangienne*. Thèse de doctorat, ENS Lyon, 2001.

[116] N. Mordant, P. Metz, O. Michel, et J.-F. Pinton. Measurement of Lagrangian velocity in fully developped turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2001. à paraître.

[117] N. Mordant, J.-F. Pinton, et F. Chillà. Characterization of turbulence in a closed flow. *J. Phys. II*, **7**, pp. 1729–1742, 1997.

[118] H. Mouri, H. Kubotani, T. Fujitani, H. Niino, et M. Takaoka. Wavelet analyses of velocities in laboratory isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **389**, pp. 229–254, 1999.

[119] J. Muzy, E. Bacry, et A. Arneodo. The multifractal formalism revisited with wavelets. *Int. J. of Bifurc. and Chaos*, **4**, 2, pp. 245–301, 1994.

[120] A. Naert, R. Friedrich, et J. Peinke. *Phys. Rev. E*, **56**, pp. 6719, 1997.

[121] M. Nelkin. Universality and scaling in fully developed turbulence. *Advances in Physics*, **43**, 2, pp. 143–181, 1994.

[122] L. Nottale. Scale relativity. Dans B. Dubrulle, F. Graner, et D. Sornette, rédacteurs, *Scale invariance and beyond*. Centre de Physique Les Houches, EDP Sciences - Springer, Cambridge, MA, USA, 1997.

[123] E. A. Novikov. Intermittency and scale-similarity in the structure of a turbulent flow. *P.M.M. Appl. Math. Mech.*, **35**, pp. 231–241, 1971. [voir aussi Prikl. Mat. Mekh. **35** 266-277 (1971)].

[124] E. A. Novikov. Infinitely divisible distributions in turbulence. *Phys. Rev. E*, **50**, 5, pp. R3303–R3305, 1994.

[125] A. M. Obukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. of Fluid Mech.*, **13**, pp. 77–81, 1962.

[126] K. Park et W. Willinger, rédacteurs. *Self-similar network traffic and performance evaluation*. Wiley (Interscience division), 2000.

[127] K. Park et W. Willinger, rédacteurs. *Self-similar network traffic and performance evaluation*. Wiley Interscience, 2000.

[128] A. Pazy. *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer, 1983.

[129] G. Pedrizzetti. Quadratic Markov modeling for intermittent turbulence. *Phys. Fluids*, **11**, 6, pp. 1694–1696, 1999.

[130] G. Pedrizzetti, E. A. Novikov, et A. A. Praskovsky. Self-similarity and probability distributions of turbulent intermittency. *Physical Review E*, **53**, 1, pp. 475–484, jan 1996.

[131] B. Pesquet-Popescu. Statistical properties of the wavelet decomposition of certain non-Gaussian self-similar processes. *Signal Processing*, **75**, 3, 1999.

[132] J.-F. Pinton, F. Chillà, et N. Mordant. Intermittency in the closed flow between coaxial corotating disks. *Europ. J. Mech./B Fluids*, **17**, 4, pp. 535–548, 1998.

[133] J.-F. Pinton et R. Labbé. Correction to Taylor hypothesis in swirling flows. *J. Phys. II France*, **4**, pp. 1461–1468, 1994.

[134] V. Pipiras et M. Taqqu. Decomposition of self-similar stable mixed moving averages. *Probability theory and related fields*, 2001. à paraître.

[135] V. Pipiras et M. Taqqu. The structure of self-similar stable mixed moving averages. *The Annals of Probability*, 2001. à paraître.

[136] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, et W. Vetterling. *Numerical recipies in C. The art of scientific computing*. Cambridge University Press.

[137] A. Pumir. A numerical study of pressure fluctuations in three-dimensional, incompressible, homogeneous, isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, **6**, 6, pp. 2071, 1994.

[138] O. Reynolds. On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **186**, pp. 123–161, 1894.

[139] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

[140] R. H. Riedi. Multifractal processes. *Long-range dependence : theory and applications*, 2001. à paraître.

[141] H. Risken. *The Fokker-Planck equation*. Springer-Verlag, 1996.

[142] S. Roux. *Wavelet analysis of the self-similarity of signals in fully developed turbulence*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 1996.

[143] S. Roux, A. Arneodo, et N. Decoster. A wavelet-based method for multifractal image analysis. III. Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *Eur. Phys. J. B*, **15**, pp. 765–786, 2000.

[144] S. Roux, J.-F. Muzy, et A. Arnéodo. Detecting vorticity filaments using wavelet analysis : about the statistical contribution of vorticity filaments to intermittency in swirling turbulent flows. *European Phys. Journal*, **8**, pp. 301–322, 1998.

[145] S. Roux, D. Veitch, P. Abry, L. Huang, J. Micheel, et P. Flandrin. Statistical scaling analysis of TCP/IP data using cascades. Dans *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.*. IEEE, Slat-Lake City, USA, 2001.

[146] G. Ruiz-Chavarria, S. Ciliberto, C. Baudet, et E. Levêque. Scaling properties of velocity field in a turbulent boundary layer. *submitted for publication*, 1999.

[147] Y. Saito. Log-Gamma distribution model of intermittency in turbulence. *J. of the Phys. Soc. of Japan*, **61**, 2, pp. 403–406, 1992.

[148] G. Samorodnitsky et M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes, stochastic models with infinite variance*. Chapman & Hall, New-York, London, 1994.

[149] D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chiguirinskaya, et D. Marsan. Log-Gamma distribution model of intermittency in turbulence. *Fractals*, **5**, 3, pp. 427–471, 1997.

[150] F. Schmitt et D. Marsan. Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades. *Eur. Phys. J. B*, **20**, pp. 3–6, 2001.

[151] Z. She, E. Jackson, et S. Orszag. Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, **344**, pp. 226, 1991.

[152] Z. She, E. Jackson, et S. Orszag. Structure and dynamics of homogeneous turbulence : models and simulations. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **434**, pp. 101–124, 1991.

[153] Z. S. She et E. Levêque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, **72**, 3, pp. 336–339, jan 1994.

[154] Z. S. She et E. C. Waymire. Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, **74**, 2, pp. 262–265, 1995.

[155] L. Shtilman, M. Spector, et A. Tsinober. On some kinematic versus dynamic properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **247**, pp. 65–77, 1993.

[156] E. D. Siggia. Numerical study of small scale intermittency in three dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **107**, pp. 375–406, 1981.

[157] D. Snyder et M. I. Miller. *Random point processes in time and space*. Springer Verlag, 1991.

[158] K. R. Sreenivasan. Fluid turbulence. *Review of Modern Physics*, **71**, 2, pp. S383–S395, 1999.

[159] K. R. Sreenivasan et G. Stolovitzky. Turbulent cascades. *Journal of Statistical Physics*, **78**, 1/2, pp. 311–333, 1995.

[160] G. Stolovitzky, J.-L. Aider, et J. E. Wesfreid. Coherent structures and conditional statistics in inhomogeneous turbulent mixing. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 23, pp. 4398–4401, 1997.

[161] J. Taine et J.-P. Petit. *Transferts themiques. Mécanique des fluides anisothermes. Cours et données de base*. Dunod, Paris, 1995.

[162] A. Tanguy, S. Krishnamurthy, P. Abry, et S. Roux. Extremal models and linear fractional stable motion. *Eur. Phys. Lett.*, **51**, 1, pp. 1–7, 2000.

[163] A. Tewfik et M. Kim. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of the fractional Brownian motion. *IEEE Trans. Info. Theory*, **38**, pp. 904–909, 1992.

[164] F. Toschi, E. Lévêque, et G. Ruiz-Chavarria. Shear effects in nonhomogeneous turbulence. *Physical Review Letters*, **85**, 7, pp. 1436–1439, 2000.

[165] A. Tsinober, E. Kit, et T. Dracos. Experimental investigation of the field of velocity gradients in turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, **242**, pp. 169–192, 1992.

[166] A. Turiel, G. Mato, N. Parga, et J. Nadal. Self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows. *Physical Review Letters*, **80**, 5, pp. 1098–1101, 1998.

[167] C. W. Van Atta et T. T. Yeh. Structure functions of turbulence in the boundary layer over the ocean. *J. Fluid Mech.*, **71**, pp. 417, 1975.

[168] D. Veitch, P. Abry, P. Flandrin, et P. Chainais. Infinitely divisible cascade analysis of network traffic data. Dans *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.*. IEEE, Istanbul, Turquie, 2000.

[169] M. Vergassola, B. Dubrulle, U. Frisch, et A. Noullez. Burgers'equation, devil's stair case and the mass distribution of large-scale structures. *Astron. Astrophys.*, 1994.

[170] M. Vergassola et U. Frisch. Wavelet transforms of self-similar processes. *Physica D*, **54**, pp. 58–64, 1991.

[171] R. Verzicco et J. Jimenez. On the survival of strong vortex filaments in model turbulence. *J. Fluid Mech.*, **394**, pp. 261–279, 1999.

[172] E. Villermaux, B. Sixou, et Y. Gagne. Intense vortical structures in grid-generated turbulence. *Phys. Fluid*, **7**, pp. 2008–2013, 1995.

[173] A. Vincent et M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, pp. 1–20, 1991.

[174] B. Volontés. *Comptes-rendus du GDR*. Rapport technique, G.D.R. Turbulence, 1997. Http ://www.lps.ens.fr/gdr/turbulence/gdr.html.

[175] A. M. Yaglom. Effect of fluctuations in energy dissipation rate on the form of turbulent characteristics in the inertial subrange. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **166**, pp. 49–52, 1966.

[176] V. Yakhot. Probability density and scaling exponents of the moments of longitudinal velocity difference in strong turbulence. *Phys. Rev. E*, **57**, 2, pp. 1737–1751, 1998.

[177] B. Ycart. Introduction aux équations différentielles stochastiques. *Signal et Non-linéaire*, septembre 1998. Accessible sur http ://www.math-info.univ-paris5.fr/∼ycart/polys_ycart.html.

[178] K. Yosida. *Functional analysis*. Springer, Berlin, 1962.

Résumé. **Cascades infiniment divisibles et analyse multirésolution. Application à l'étude des intermittences en turbulence.**

Les cascades log-infiniment divisibles fournissent un cadre général à l'étude de la propriété d'*invariance d'échelle*. Nous introduisons ces objets en décrivant l'évolution historique des différents modèles proposés pour décrire le phénomène d'intermittence statistique en turbulence. Nous nous appliquons alors à préciser une définition formelle des cascades log-infiniment divisibles. Nous remplaçons aussi les accroissements, usuels en turbulence, par les coefficients d'une transformée en ondelettes associée à une analyse multirésolution, outil dédié à l'analyse temps-échelle. Une réflexion approfondie sur la signification du formalisme nous amène à démontrer sa flexibilité pour la modélisation, ainsi que sa richesse en lien avec les cascades multiplicatives, les processus de Markov, l'équation de Langevin, l'équation de Fokker-Planck...Grâce à l'étude des cascades log-Poisson composées, nous proposons une vision originale du phénomène d'intermittence statistique. Ensuite, des estimateurs des exposants de lois d'échelle (éventuellement relatives) sont étudiés en insistant sur la correction du biais et la détermination d'intervalles de confiance. Nous les appliquons à des données de télétrafic informatique. Nous expliquons pourquoi une procédure usuelle d'estimation du spectre multifractal appliquée aux mouvements linéaires stables fractionnaires risque de mener à une méprise. Enfin, le lien entre intermittence statistique et intermittence spatio-temporelle (structures cohérentes) en turbulence est étudié à partir de l'enregistrement de signaux de vitesse et de pression conjointement en espace et en temps dans un écoulement turbulent. De fortes dépressions associées à des tourbillons filamentaires sont détectées. Une analyse statistique des coefficients d'ondelette de la vitesse conditionnée à ces événements nous permet de décrire l'influence de ces structures cohérentes à différents nombres de Reynolds.

Mots-clé : invariance d'échelle, transformée en ondelettes, processus stochastiques, cascades multiplicatives, intermittence, structures cohérentes, distributions infiniment divisibles, estimation, télétrafic, processus α-stables.

Abstract. **Infinitely divisible cascades and multiresolution analysis. Application to the study of intermittencies in turbulence.**

Log-infinitely divisible cascades provide a general framework to study the property of *scale invariance*. We introduce these objects through a historical presentation of some models proposed in the past to describe statistical intermittency in turbulence. We then aim at giving a precise and formal definition to log-infinitely divisible cascades. Moreover, we choose to use the wavelet transform coefficients associated to a multiresolution analysis, specially dedicated to time-scale analysis, rather than the increments traditionally used in turbulence. A deep understanding of the formalism leads us to demonstrate its versatility for modelling, and its relations to multiplicative cascades, Markov processes, Langevin equation, Fokker-Planck equation... The particular case of log-compoung Poisson cascades provides us with new insights in the phenomenon of statistical intermittency. Then, we study some estimates of (relative) power law scaling exponents with an emphasis on bias correction and confidence interval estimation. We apply this technique to internet traffic data. We explain as well why a usual procedure to estimate a multifractal spectrum applied to a linear fractional stable motion may result misleading. Eventually, the link between statistical intermittency and spatio-temporal intermittency (coherent structures) is investigated in turbulence thanks to joint velocity/pressure measurements in a turbulent flow. Strong pressure drops due to vortices called filmaents are detected. A statistical analysis of the wavelet coefficients of the velocity signal conditionned by those detected events allows us to quantify the influence of coherent structures on intermittency at different Reynolds numbers.

Key-words : scale invariance, wavelet transform, stochastic processes, multiplicative cascades, intermittency, coherent structures, infinitely divisible distributions, estimation, traffic, α-stable processes.

Thèse de Physique. Laboratoire de Physique ENS Lyon, 46, allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 7